

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۳/۲/۳۱

موضوع امتحان: جبر

- در سوالات زیر تمام حلقه‌ها یک‌دار و مدولها یکانی‌اند و ارزش تمامی سوالات با هم برابر می‌باشد.
- ۱- R یک حلقه است بقسمی که R شامل یک میدان K بوده و R دارای مقسوم‌علیه صفر ناصفر نیست. هرگاه R به عنوان یک K -مدول چپ دارای بعد متناهی باشد، ثابت کنید R یک حلقه تقسیم است.
- ۲- فرض کنید G یک p -گروه متناهی است. هرگاه G دارای یک زیرگروه منحصر به فرد از اندیس p باشد، ثابت کنید G دوری است.
- ۳- فرض کنید R حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی روی یک حلقه تقسیم D است. رادیکال جیکبسن (Jacobson) R را یافته و نشان دهید به عنوان یکریختی حلقه‌ای داریم $R/J(R) \cong D \times \cdots \times D$.
- ۴- فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R و M و N دو R -مدول‌اند.
الف) نشان دهید به عنوان R/I -مدول‌های چپ داریم $R/I \otimes_R M \cong M/IM$.
ب) فرض کنید R حلقه \mathbb{Z}_4 و M ایده‌آل $\frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ باشد. ثابت کنید $M \otimes_R M \simeq M$ به عنوان R -مدول.
- ۵- فرض کنید R یک حلقه نیمه ساده است.
الف) ثابت کنید تحت یکریختی فقط تعداد متناهی R -مدول ساده وجود دارد.
ب) تمام ایده‌آلهای اول R را مشخص کنید.
- ۶- فرض کنید R یک حلقه جابجایی موضعی با ایده‌آل ماکزیمال m است. قرار دهید $k = R/m$ و فرض کنید M یک R -مدول متناهیاً تولید شده است. ثابت کنید هرگاه $Hom_R(M, k) = 0$ ، آنگاه $M = 0$.

Ph.D. Entrance Examination

Algebra

All the rings have a unity and modules are unitary and all questions have the same points.

- 1) Let R be a ring which contains a field K . Assume that R has no non-zero divisors, and R is finite dimensional as a left K -module. Prove that R is a division ring.
- 2) Prove that a finite p -group with a unique subgroup of index p is cyclic.
- 3) Denote by R the ring of upper triangular matrices over a division ring D . Calculate the Jacobson radical $J(R)$ and show that $R/J(R) \cong \times D$.

4) Let I be an ideal of a ring R , and M, N be two R -modules.

i) Show that $M/I \otimes_R N/I \cong (M \otimes_R N)/I$ as left R/I -modules.

ii) Let R be the ring \mathbb{Z} and let M be the ideal $\frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$. Prove that $M \otimes_R M \cong M$ as R -module.

5) Let R be a semi-simple ring.

- i) Prove that up to isomorphism there are only finitely many simple R -modules.
- ii) Identify all the prime ideals of R .

6) Let R be a local commutative ring with maximal ideal m , and let $k = R/m$, and M be a finitely generated R -module. Show that if $\text{Hom}_R(M, k) = 0$, then $M = 0$.