بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۹٫۳٫۲۷

موضوع امتحان: **جبر**

توجه: امتیاز هر شش مسئله مساوی است.

۱ـ نشان دهید هیچ گروه G وجود ندارد به‌طوری که $|G/Z(G)| = ۷۷$.

۲ـ فرض کنید G یک گروه بوده و $f : G \times G \to G$ یک همریختی گروهی باشد. اگر وجود داشته باشد $a \in G$ به‌طوری که به‌ازای هر $x \in G$ داشته باشیم، $f(a,x) = x = f(x,a)$ در این صورت نشان دهید G گروهی جابجایی است. همچنین نشان دهید a عضو خنثی گروه G است.

۳ـ فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی نوتری و یکدار بوده و $I, J \subset R$ دو ایده‌آل از R باشند به‌طوری که داشته باشیم:

(i) هیچ ایده‌آل اولی از R وجود ندارد که شامل هر دو ایده‌آل J, I باشد. (ii) هر ایده‌آل اول R یا شامل I است یا شامل J است. (ممکن است بعضی از ایده‌آلهای اول شامل I باشند و برخی دیگر شامل J.) ثابت کنید وجود دارند زیرحلقه‌های $R_۱, R_۲$ از R به‌طوری که $R \simeq R_۱ \times R_۲$ (به‌عنوان حلقه‌ای) و $R_۱, R_۲ \neq \{۰\}$.
آیا شرط نوتری بودن حلقه لازم است؟

۴ـ فرض کنید R یک حلقهٔ آرتینی چپ یکدار بوده و به‌ازای هر $x \in R$ وجود داشته باشد $y \in R$ به‌طوری که $x^۲ y = x$. ثابت کنید R با حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های تقسیم یکریخت است.

۵ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و نوتری یکدار بوده و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد نشان دهید $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ نیز Rـمدولی با تولید متناهی است. اگر N، Rـمدول با تولید متناهی دیگری باشد آیا $M \otimes_R N$ به‌عنوان Rـمدول نوتری است؟ اگر شرط با تولید متناهی بودن N راحذف کنیم چطور؟

۶ـ فرض کنید R حلقه‌ای یکدار (نه لزوماً جابجایی) بوده و J رادیکال جیکوبسن R باشد. اگر M یک Rـمدول چپ با تولید متناهی باشد در این صورت نشان دهید:

(الف) $JM \subseteq \bigcap_{\lambda \in I} M_\lambda$ که در آن $\{M_\lambda | \lambda \in I\}$ خانوادهٔ تمام زیرمدولهای ماکسیمال M است. اگر R/J حلقه‌ای نیمه‌ساده باشد نشان دهید تساوی برقرار است.

ب) Rـمدول هومومورفیسم $f : P \to M$ را اساسی نامیم هرگاه پوشا بوده ولی تحدید آن به هر زیر مدول سره از P پوشا نباشد. فرض کنید P یک Rـمدول تصویری با تولید متناهی بوده و $f : P \to M$ یک Rـمدول هومومورفیسم پوشا باشد اگر $\ker f \subseteq JP$ نشان دهید f اساسی است. اگر R/J حلقه‌ای نیمه‌ساده بوده و f اساسی باشد آنگاه ثابت کنید $\ker f \subseteq JP$.

Algebra

1) Show that there is no group such that $|G/Z(G)| = 77$.

2) Let G be a group with $G \times G$ the direct product. Suppose $f : G \times G \to G$ is a homomorphism and suppose also that there is an element a in G such that $f(a, x) = x = f(x, a)$ for all x in G. Prove that G is abelian group. Also show that a is identity element.

3) Let R be a Noetherian commutative ring with unit and let $I, J \subset R$ be two proper ideals such that (i) no prime ideal of R contains both I and J and (ii) all prime ideals of R contain either I or J. Prove that, as a ring, R splits as a direct product of subrings $R \simeq R_1 \times R_2$, $R_1, R_2 \neq \{0\}$. Is necessary the noetherian condition?

4) Let R be a left Aritian ring which has the property that for any $x \in R$, there exists $y \in R$ such that $x^2 y = x$. Prove that R is a direct sum of finitely many division rings.

5) Let R be a commutative Noetherian ring and M is a finitely generated module over R. Prove that $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ is a finitely generated R-module. If N is a finitely generated R-module is the R-module $M \otimes_R N$ noetherian? What about if we omit the condition of finitely genertedness of N?

6) Let R be a ring with unit and radical Jacobson J. If M is a left finitely generated R-module, prove that,

a) $JM \subseteq \bigcap\limits_{\lambda} M_\lambda$, where M_λ ranges over all maximal submodules of M. Moreover if R/J is a semisimple ring then equality holds.

b) An R-module homomorphism is called essential if it is surjective but its restriction to any proper submodule of M fails to be surjective. Let P be a finitely generated projective R-module and $f : P \to M$ is a sunjective homomorphism. If $\ker f \subseteq JP$ then f is essential. If R/J is a semisimple ring, then this sufficient condition is also necessary.