بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۰٫۴٫۸

موضوع امتحان: **جبر**

۱ـ فرض کنید G یک گروه و G' زیرگروه جابجاگر G باشد. به‌علاوه فرض کنید G' آبلی و G/G' دوری است. نشان دهید وجود دارد $g \in G$ به‌طوری که هیچ زیرگروه نرمال سره‌ای از G شامل g نمی‌باشد.

۲ـ نشان دهید که گروه خودریختی‌های حلقه‌ای یک میدان متناهی یک گروه دوری است.

۳ـ الف) ثابت کنید که هر حلقه جابجایی و یکدار نیمه‌ساده حاصلضرب مستقیمی از تعدادی متناهی میدان است.

ب) فرض کنید A یک جبرجابجایی یکدار با بعد متناهی روی میدان k است و A عنصر پوچ توان ناصفر ندارد. نشان دهید که A نیمه‌ساده است.

۴ـ الف) فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و M و N دو Rـمدول آزاد با رتبه متناهی باشند. ثابت کنید به‌عنوان Rـمدول داریم، $End_R(M) \underset{R}{\otimes} End_R(N) \simeq End_R(M \underset{R}{\otimes} N)$.

ب) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار بوده و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری که $I^۲ \neq I \neq R$. نشان دهید $۱_{R/I} \underset{R}{\otimes} i$ که در آن $i : I \to R$ هومومورفیسم شمول و $۱_{R/I} : R/I \to R/I$ همریختی همانی است یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۵ـ حلقهٔ R را اول گویند هرگاه ایده‌آل صفر یک ایده‌آل اول باشد. فرض کنید حلقه یکدار R دارای یک ایده‌آل چپ مینیمال ناصفر است. ثابت کنید R یک حلقه اول است اگر و تنها اگر R یک حلقه ابتدایی چپ باشد.

۶ـ فرض کنید R حلقه‌ای یکدار است. Rـمدول تصویری را تعریف کنید. نشان دهید P یک R مدول تصویری است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد Rـمدول آزاد F و Rـمدول K به‌طوری که $F \simeq K \oplus P$ به‌عنوان Rـمدول. آیا $\prod_{i=۱}^{\infty} \mathbb{Q}$ (حاصلضرب دکارتی تعداد شمارایی از $\mathbb{Q}$) به‌عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول تصویری است؟

Algebra

1) Let G be a group and let G' be the commutator subgroup of G. Suppose that G' is abelian and G/G' is a cyclic group . Show that there is some $g \in G$ such that no proper nomal subgroup of G containing g.

2) Show that the group of ring automorphisms of a finite field is cyclic.

3) a) Show that every semisimple commutative ring with unity is isomorphic to a direct product of finitly many fields.

b) A is a commutative algebra with unity of finite dimension over a field k, and A has no non-zero nilpotent element. Show that A is a semisimple ring.

4) a) Let R be a commutative ring and M, N two free R-modules of finite rank. Prove that $End_R(M) \underset{R}{\otimes} End_R(N) \simeq End_R(M \underset{R}{\otimes} N)$ as R-modules.

b) Let R be a commutative ring with unity and let I be an ideal of R such that $I^2 \neq I \neq R$. Show that $i \underset{R}{\otimes} 1_{R/I}$, where $i : I \to R$ is the inclusion homomorphism and $1_{R/I} : R/I \to R/I$ is the identity homomorphism, is not injective.

5) A ring R is said to be prime if the zero deal is prime. Given a ring R with unity such that R contains a non-zero minimal left ideal, show that R is prime if and only if R is left primitive.

6) Let R be a ring with unity. Define a projective R-module. Show that P is projective R-module if and only if there is a free R-module F and an R-module K such that $F \simeq K \oplus P$ as R-modules.

Is $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}$ (cartesian product of countable copies of $\mathbb{Q}$) a projective $\mathbb{Z}$-module?