بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۱/۳/۳

موضوع امتحان: **جبر**

توجه: در تمام مسائل زیر، حلقه‌ها یکدار بوده و تمامی مدولها یکانی می‌باشند.

۱ـ فرض کنید G یک گروه بوده به‌طوری که هیچ زیرگروهی از اندیس ۲ ندارد. ثابت کنید هر زیرگروه از اندیس ۳ در G نرمال است.

۲ـ تمام حلقه‌های متناهی R را مشخص کنید به‌طوری که به‌ازای هر $x \in R$ داشته باشیم، $x^4 + x = 3x^3 - x^2$.

۳ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و m ایده‌آلی از R باشد.

الف) اگر m هم ماکسیمال و هم اصلی باشد نشان دهید هیچ ایده‌آلی مانند I از R با خاصیت $m^2 \subsetneqq I \subsetneqq m$ وجود ندارد.

ب) با ذکر دو مثال نشان دهید هر دو شرط موجود در قسمت (الف) لازم است.

۴ـ فرض کنید R یک حلقه بوده و S زیرحلقه‌ای از R باشد که در مرکز R قرار دارد. به‌علاوه فرض کنید R به‌عنوان Sـمدول چپ با تولید متناهی است. نشان دهید اگر M یک Rـمدول ساده باشد آنگاه M به‌عنوان Sـمدول چپ با تولید متناهی است و با استفاده از آن ثابت کنید $J(S) \subseteq J(R)$ که در آن $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقهٔ R است.

۵ـ فرض کنید R یک حلقه بوده و $R = \sum_{i=1}^{m} I_i$ که در آن I_iها ایده‌آلهای دوطرفه‌ای از R هستند و به‌ازای هر $i \neq j$، $I_i \cap I_j = 0$.

الف) ثابت کنید برای هر Rـمدول چپ ساده M وجود دارد اندیس یکتای k به‌طوری که $I_k M \neq 0$.

ب) نشان دهید اگر $i \neq j$، آنگاه هر Rـمدول همریختی چپ $\theta : I_i \to I_j$ نگاشت صفر است.

۶ـ الف) فرض کنید $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ رشتهٔ دقیقی از Rـمدولهای چپ باشند. نشان دهید برای هر Rـمدول راست D، رشته،

$$D \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes f} D \otimes_R B \xrightarrow{1 \otimes g} D \otimes_R C \to 0$$

رشتهٔ دقیقی از $\mathbb{Z}$ـمدولها است.

ب) فرض کنید G گروهی آبلی باشد. ثابت کنید هستهٔ نگاشت $G \to Q \otimes_{\mathbb{Z}} G$، که در آن $a \to 1 \otimes a$ دقیقاً تمام اعضایی از G می‌باشند که دارای مرتبهٔ متناهی هستند.

Algebra

In the following problems all Rings have unity and all R-modules are unitary.

1) Prove that if G is a group containing no subgroup of index 2, then any subgroup of index 3 is normal.

2) Classify all finite rings R with the following property: for any $x \in R$, $x^4 + x = 3x^3 - x^2$.

3) Let R be a commutative ring and suppose that m is an ideal of R.

i) If m is both maximal and principle show that there is no ideal I of R satisfying $m^2 \subsetneqq I \subsetneqq m$.

ii) Give examples to show that neither of the two conditions on M in part (i) can be removed.

4) Let R be a ring and S be a subring contained in the center of R. Suppose that R is finitely generated as a left S-module. Show that if M is a simple left R-module then M is finitely generated as a left S-module and using it prove that $J(S) \subseteq J(R)$, where $J(R)$ denotes the Jacobson radical of R.

5) Let R be a ring and suppose that R can be written as the sum $R = \sum_{i=1}^{m} I_i$, where the I_i are finitely many two sided ideals of R satisfying $I_i \cap I_j = 0$, whenever $i \neq j$.

i) Prove that for every simple left R-module M, there exists a unique subscript k such that $I_k M \neq 0$.

ii) Show that if $i \neq j$, then every left R-module homomorphism $\theta : I_i \to I_j$ is the zero map.

6) i) Let $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ be an exact sequence of left R-modules. Show that for any right R-module D,

$$D \otimes_R A \xrightarrow{1\otimes f} D \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes g} D \otimes_R C \to 0$$

is an exact sequence of $\mathbb{Z}$-modules.

ii) Let G be an abelian group. Prove that the kernel of the map $G \to Q \otimes_{\mathbb{Z}} G$, where $a \to 1 \otimes a$ is exactly the set all elements of G which are of finite order.