بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۵,۲,۸

موضوع امتحان: **جبر**

۱ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار بوده و M و N دو Rـمدول باشند. حاصلضرب تانسوری دو Rـمدول M و N روی R را تعریف کرده و نشان دهید اگر I و J دو ایده‌آل حلقهٔ R باشند آنگاه داریم:

$$\frac{R}{I} \underset{R}{\otimes} \frac{R}{J} \simeq \frac{R}{I+J}$$

۲ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد.

الف) اگر I ایده‌آلی از R بوده و $I \subseteq J(R)$ ($J(R)$ رادیکال جیکوبسن R است) و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد به‌طوری‌که $IM = M$ ثابت کنید $M = 0$.

ب) اگر R حلقه‌ای نوتری و موضعی با ایده‌آل ماکسیمال m باشد و ایده‌آل m/m^2 در حلقهٔ R/m^2 با عناصر $\{m^2 + a_1, \ldots, m^2 + a_n\}$ تولید شود ثابت کنید ایده‌آل m در R توسط $\{a_1, \ldots, a_n\}$ تولید می‌شود. (حلقهٔ R را موضعی گوئیم هرگاه فقط یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد).

۳ـ فرض کنید G گروهی غیرجابجایی از مرتبهٔ p^m بوده (p عددی اول) و حداقل یک زیرگروه آبلی از اندیس p داشته باشد. نشان دهید G، ۱ یا $p + 1$ زیرگروه آبلی از اندیس p دارد و در حالت اخیر، $[G : Z(G)] = p^2$.

۴ـ فرض کنید R یک حلقه باشد. Rـمدول تصویری و اینژکتیو را تعریف کنید و نشان دهید Q به‌عنوان Zـمدول تصویری نیست. همچنین ثابت کنید اگر R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و موضعی باشد آنگاه هر Rـمدول تصویری با تولید متناهی آزاد است. با ذکر یک مثال نشان دهید شرط موضعی بودن در مسئله لازم است.

۵ـ فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری چپ باشد که مقسوم‌علیه صفر ندارد. نشان دهید برای هر $c \neq 0$ و هر ایده‌آل چپ ناصفر I از R داریم $Rc \cap I \neq (0)$.

۶ـ فرض کنید R یک حلقه بوده به‌طوری‌که برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم، $(xy + yx)^۲ = xy + yx$.
ثابت کنید برای هر $x, y \in R$ داریم، $xy + yx = ۰$.

Algebra

1) Let R be a commutative ring with unity and M and N be two R-modules. Define the tensor product of M and N over R and show that if I and J are two ideals of R, then there is an R-module isomorphism

$$\frac{R}{I} \bigotimes_R \frac{R}{J} \simeq \frac{R}{I+J}$$

2) Let R be a commutative ring with unity.

a) Let I be an ideal of R and $I \subseteq J(R)$ ($J(R)$ is the Jacobson radical of R). Given a finitely generated R-module of M such that $IM = M$, show that $M = 0$.

b) Let R be a Noetherian local ring with maximal ideal m. If the ideal m/m^2 in R/m^2 is generated by $\{m^2 + a_1, \ldots, m^2 + a_n\}$, prove that ideal m is generated in R by $\{a_1, \ldots, a_n\}$. (R is called local if it has only one maximal ideal).

3) Let G be a non-abelian group of order p^m (p is a prime) with an abelian subgroup of index p. Then G has either 1 or $p+1$ abelian subgroups of index p, and in the latter case $[G : Z(G)] = p^2$.

4) Let R be a ring. Define the injective and projective R-module and show that Q is not a projective Z-module. Also prove that if R is a local commutative ring with unity, then every finitely generated projective R-module is free. By an example show that the local condition is necessary.

5) Let R be a left notherian integral domain. Then show that for all $0 \neq c \in R$ and for any nonzero left ideal I in R, we have $Rc \cap I \neq (0)$.

6) Let R be a ring such that $(xy + yx)^2 = xy + yx$ for all x and y in R. Prove that $xy + yx = 0$ for all $x, y \in R$.