

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۶,۲,۱۶

موضوع امتحان: جبر

(۱) فرض کنید G گروهی ناآبلی و p^3 عضوی بوده که در آن p عددی اول است. ثابت کنید $Z(G) = G'$ مرکز $Z(G)$ و G' گروه مشتق G است.

(۲) فرض کنید F و K دو میدان بوده و K توسیع F باشد. اگر $a \in K$ و $[F(a) : F]$ عددی فرد باشد نشان دهید $[F(a^2) : F]$ نیز عددی فرد است و $F(a) = F(a^2)$.

* در تمام مسائل زیر حلقه‌ها یک‌دگر می‌باشند.

(۳) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و M و N دو R -مدول باشند. حاصلضرب تانسوری $M \otimes_R N$ را به‌طور دقیق تعریف کرده و $Z_m \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ را محاسبه کنید. به‌علاوه بیان کنید $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_m \times Q, Z_n \times Q)$ با کدام گروه یکرخت است (« \times » نماینده ضرب دکارتی است).

(۴) فرض کنید R یک حلقه بوده و I یک ایده‌آل چپ مینیمال R باشد. ثابت کنید $I^2 = \{0\}$ یا $I = Re$ که در آن e عنصر خودتوانی از حلقه است یعنی $e^2 = e$.

(۵) فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد. اگر R شامل هیچ عنصر ناصفر پوچتوان نباشد نشان دهید R با حاصل جمع مستقیمی از میدانها یکرخت است.

(۶) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و P یک R -مدول تصویری و M و N دو R -مدول دلخواه باشند. نشان دهید:

(الف) اگر دنباله $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ دقیق باشد آنگاه شکافته می‌شود.

(ب) اگر M و N تصویری باشند آنگاه $M \otimes_R N$ ، R -مدولی تصویری است.

(ج) اگر P ناصفر باشد آنگاه حداقل یک زیر مدول ماکسیمال دارد.

Ph.D. Entrance Examination

Algebra

- 1) Let G be a non-abelian finite group of p^3 elements, where p is a prime number, Prove that the centre of G , $Z(G) = G'$, where G' is the commutator subgroup of G .
- 2) Let K be an extension field of the field F and $a \in K$. If $[F(a) : F]$ is odd prove that $[F(a^2) : F]$ is odd and $F(a) = F(a^2)$.

* (in the following all ring have a unity element.)

- 3) Let R be a commutative ring and M, N be R -modules. Define the notion of $M \otimes_R N$ and calculate $Z_m \otimes_{\mathbb{Z}} Q$. Furthermore, with what group is $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_m \times Q, Z_n \times Q)$ isomorphic? (“ \times ” denotes cartesian product).
- 4) Let I be a minimal left ideal in a ring R . Then either $I^2 = \{0\}$ or $I = Re$ where e is an idempotent in R that is $e^2 = e$.
- 5) Let R be a finite ring. If R has no nonzero nilpotent elements, show that R is isomorphic to a direct sum of fields.
- 6) Let R be a commutative ring and P be a projective R -module, and M, N be two arbitrary R -modules. Show that
 - a) If the sequence $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ is exact, then it splits.
 - b) If M, N are projective, then so is $M \otimes_R N$ as an R -module.
 - c) If P is non-zero, then P has at least one maximal submodule.