بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۷٫۲٫۳۱

موضوع امتحان: **جبر**

در تمام مسائل زیرحلقه‌ها یکدار می‌باشند.

۱ـ فرض کنید $G = Z_{8} \times Z_{12} \times Z_{30}$ که در آن Z_n گروه دوری n عضوی است. آیا از G به گروه Z_{45} هومومورفیسم پوشا وجود دارد؟ به Z_{120} چطور؟

۲ـ الف) فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد، در این صورت گزارهٔ زیر را رد یا اثبات کنید:
هر عضو R یا مقسوم‌علیه صفر است یا وارون‌پذیر است.

ب) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد. ثابت کنید مجموعهٔ عناصر پوچتوان R برابر است با اشتراک ایده‌آلهای اول R.

۳ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و I ایده‌آلی از R باشد که در رادیکال جیکوبسن R قرار دارد و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد. اگر $\frac{R}{I} \underset{R}{\otimes} M = 0$ ثابت کنید $M = 0$.

۴ـ اگر P یک Rـمدول تصویری باشد در این صورت وجود دارد یک Rـمدول آزاد F و یک Rـمدول K به‌طوری‌که $F \simeq K \oplus P$. آیا $Z[x]$ به‌عنوان Zـمدول تصویری است؟ آیا این مطلب درست است که هر Rـمدول را می‌توان در یک Rـمدول تصویری نشاند؟ چرا؟

۵ـ فرض کنید M یک Rـمدول باشد در این صورت رادیکال M را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{rad} M = \cap \{N \mid \text{زیرمدولی از } M \text{ بوده و } \frac{M}{N} \text{ ساده است } N\}$$

و اگر Nای وجود نداشته باشد که $\frac{M}{N}$ ساده باشد قرار می‌دهیم $\mathrm{rad} M = M$. ثابت کنید Rـمدول M نیمه ساده و با تولید متناهی است اگر و تنها اگر M آرتینی بوده و $\mathrm{rad} M = 0$.

۶ـ فرض کنید M یک Rـمدول باشد. زیرمدول L از M را بزرگ گویند اگر بازای هر زیرمدول $N \neq 0$ از M داشته باشیم $L \cap N \neq 0$. ثابت کنید:

الف) اگر M_1 و M_2 زیرمدولهایی از M باشند به‌طوری‌که $M = M_1 + M_2$ و N_1 و N_2 به‌ترتیب زیرمدولهای بزرگی از M_1 و M_2 باشند و به‌علاوه $N_1 \cap N_2 = 0$ در این صورت $N_1 + N_2$ زیرمدول بزرگی از M است.

ب) اگر مدول M هیچ زیرمدول بزرگ سره‌ای نداشته باشد آنگاه M نیمه‌ساده است.

Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Algebra

All the rings have a unit element.

1. Let $G = Z_8 \times Z_{12} \times Z_{30}$, where Z_n denotes the cyclic group of order n. Does G admit a homomorphism onto Z_{45}? What about Z_{120}?

2. a) Let R be a finite ring. Is it true to say that every element of R is either a zero divisor or invertible.

b) Let R be commutative ring. Prove that the intersection of all prime ideals of R equals the set of nilpotent elements of R.

3. Let R be a commutative ring and I an ideal contained in the Jacobson radical $J = J(R)$, and M a finitely generated R-module. If $\frac{R}{I} \underset{R}{\otimes} M = 0$, then $M = 0$.

4. Let R be a ring. If P is a projective R-module, then there is a free R-module F and an R-module K such that $F \simeq K \oplus P$. Is the ring $Z[x]$ a projective Z-module? Is it true that every R-module can be embedded in a projective R-module?

5. Let M be an R-module. The radical of M is defined as rad $M = \cap\{N \mid \frac{M}{N}$ is simple and N is a submodule of $M\}$. If there is no N such that $\frac{M}{N}$ is simple we put rad$M = M$. Prove that an R-module is finitely generated and semisimple if and only if M is Artinian and rad $M = 0$.

6. Let M be an R-module. A submodule L of M is **large** if $L \cap N \neq 0$ for any non-zero submodule N of M. Prove that

a) If M_1 and M_2 are submodules of M such that $M = M_1 + M_2$ and N_1 and N_2 are large submodules of M_1 and M_2 respectively with $N_1 \cap N_2 = 0$, then $N_1 + N_2$ is large in M.

b) If a module M has no large proper submodules, then M is semisimple.