بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۸/۲/۱۰

موضوع امتحان: **جبر**

*** در تمامی مسائل زیر حلقه‌ها یکدار و مدولها یکانی می‌باشند.**

۱ـ فرض کنید G گروهی نامتناهی بوده، $e \neq x \in G$ و کلاس تزویجی x متناهی باشد. ثابت کنید G نمی‌تواند گروهی ساده باشد.

۲ـ فرض کنید $f(x) \in F[x]$ تحویل‌ناپذیر و از درجهٔ عدد اول p بوده و $F \subseteq E$ و $[E:F] < \infty$. اگر $f(x)$ در $E[x]$ تحویل‌ناپذیر نباشد نشان دهید $p | [E:F]$. (E و F هر دو میدان هستند.)

۳ـ فرض کنید R حلقه‌ای آرتینی راست بوده به‌طوری که مجموعهٔ ایده‌آلهای راست آن مرتب باشد یعنی برای هر دو ایده‌آل راست I_1 و I_2 داریم $I_2 \subseteq I_1$ یا $I_1 \subseteq I_2$. اگر J رادیکال جیکوبسن حلقهٔ R باشد ثابت کنید:

i) R/J یک حلقهٔ تقسیم است.

ii) هر ایده‌آل راست سره از R به‌صورت J^n می‌باشد که در آن $n \in \mathbb{N}$.

۴ـ اگر R حلقه‌ای نیمه‌ساده باشد در این صورت ثابت کنید هر Rـمدول چپ M، نیمه‌ساده است. تمام حلقه‌های نیمه‌ساده ۱۴۴ عضوی را مشخص کنید.
(حلقهٔ R را نیمه‌ساده گویند هرگاه به‌عنوان Rـمدول چپ، نیمه‌ساده باشد.)

۵ـ فرض کنید A گروهی آبلی و با تولید متناهی باشد در این صورت معین کنید $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} Q$ با کدام $\mathbb{Z}$ـمدولها می‌تواند به‌عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول یکریخت باشد. هomomorفیسم $f : A \to A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} Q$ را با ضابطهٔ $f(a) = a \otimes 1$ در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی f یک‌به‌یک است؟

۶ـ فرض کنید R یک حلقه بوده و e عنصر خودتوانی از R باشد یعنی $e^2 = e$. نشان دهید $R = Re \oplus R(1-e)$.
اگر $a \in R$ نشان دهید Rـمدول چپ Ra تصویری است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد عنصر خودتوان e به‌طوری‌که $\{x \in R \mid xa = 0\} = Re$.

توجه: ارزش تمامی سؤالها برابر است.

Algebra

All rings have a unit element and modules are unitary.

1) Let G be an infinite group, $e \neq x \in G$ and the conjugate class of x has finitely many elements. Prove that G is not a simple group.

2) Let $f(x) \in F[x]$ be irreducible of prime degree p and $F \subseteq E$ with $[E:F] < \infty$. If f is not irrednc ible in $E[x]$, show that $p | [E:F]$. (E and F are fields.)

3) Suppose R is a right Artinian ring whose set of right ideals is linearly ordered, i.e., if I_1 and I_2 are right ideals, then either $I_1 \subseteq I_2$ or $I_2 \subseteq I_1$.
If J denotes the Jacobson radical of R, then prove that:

i) R/J is a division ring.

ii) Every proper right ideal in R is of the form J^n for some $n \in \mathbb{N}$.

4) If R is a semisimple ring, then prove that every left R-module M is semisimple. Describe all semisimple rings having 144 elements. (A ring R is semisimple if as a left R-module is semisimple).

5) Suppose A is a finitely generated abelian group. Determine which $\mathbb{Z}$-modules can be isomorphic to $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} Q$ as $\mathbb{Z}$-module. Consider the homomorphism $f : A \to A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} Q$ such that $f(a) = a \otimes 1$. Under which conditions is f a monomorphism?

6) Let R be a ring and e is an idempotent element i.e., $e^2 = e$. Show that $R = Re \oplus R(1-e)$. If $a \in R$, prove that left R-module of Ra is projective iff there exists an idempotent of R, say e, such that $\{x \in R \mid xa = 0\} = Re$.