

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۹/۳/۲۶

موضوع امتحان: آنالیز

۱- فرض کنید $f \in L^1(\mathbb{R})$.

الف) تعریف کنید $m_t = m\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > t\}$ و ثابت کنید $m_t \leq \frac{\|f\|_1}{t}$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} tm_t = 0$. (در اینجا m معرف اندازه لبگ است.)

ب) ثابت کنید $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ روی $\text{Re } z > 0$ تابعی تحلیلی از z است.

۲- فرض کنید $\{P_n\}$ یک دنباله از نگاشتهای خطی روی $C[0, 1]$ است به طوری کهالف) برای تمام n ها، $P_n(f) \geq 0$ وقتی که $f \geq 0$.ب) $P_n(1) \rightarrow 1$ ، $P_n(t) \rightarrow t$ و $P_n(t^2) \rightarrow t^2$ به طور یکنواخت روی $[0, 1]$.ثابت کنید برای هر $f \in C[0, 1]$ ، $P_n(f) \rightarrow f$ به طور یکنواخت روی $[0, 1]$.۳- گیریم E یک مجموعه لبگ اندازه پذیر در \mathbb{R} با $m(E) > 0$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک بازه متناهی بسته متناهی J وجود دارد به طوری که

$$m(E \cap J) > (1 - \epsilon)m(J)$$

۴- به طور دقیق ثابت کنید که

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{itx} dx = \exp(-t^2/2)$$

۵- گیریم $\{a_n\}$ دنباله ای مثبت باشد به طوری که $\sum_n a_n b_n < \infty$. ثابت کنید برای تمام $\{b_n\}$ ، $b_n \geq 0$ و $\sum b_n^2 < \infty$ آنگاه $\sum a_n^2 < \infty$.۶- فرض کنید F تابعی حقیقی به قلمرو \mathbb{R} است به طوری که:

الف) مجموعه اندازه پذیر $E \subset [0, 1]$ با $m(E) > \frac{1}{4}$ موجود است به طوری که F در هر نقطه از E مشتق پذیر است و $M > 0$ ای موجود است به طوری که برای $x \in E$ داشته باشیم $|F'(x)| \leq M$.

ب) $N > 0$ و ثابت موجود است به طوری که برای هر دسته از زیرپاره های جدا از هم از $[0, 1]$ مانند $[x_k, y_k]$ ،

$\sum_{k=1}^n |F(y_k) - F(x_k)| \leq N$ صدق کند داشته باشیم: $\frac{1}{2} \geq \sum_{k=1}^n (y_k - x_k)$ که در $k = 1, \dots, n$

ثابت کنید $|F(1) - F(0)| \leq \frac{M}{4} + N$.

Analysis

1) Let $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- i) Define $m_t = m\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > t\}$. Prove $m_t \leq \frac{\|f\|_1}{t}$ and $\lim_{t \rightarrow 0^+} tm_t = 0$.
- ii) Prove $F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ is analytic function of z for $\operatorname{Re} z > 0$.

2) Let $\{P_n\}$ be a sequence of linear maps on $C[0, 1]$ such that

- i) $P_n(f) \geq 0$ whenever $f \geq 0$, for all n .
- ii) $P_n(1) \rightarrow 1$, $P_n(t) \rightarrow t$, $P_n(t^2) \rightarrow t^2$, uniformly on $[0, 1]$.

Prove that $P_n(f) \rightarrow f$ uniformly on $[0, 1]$ for every f in $C([0, 1])$.

3) let E be any Lebesgue measurable set in \mathbb{R} with $m(E) > 0$. Then for any $\epsilon > 0$ there is a finite, interval $J(J = [a, b]$ for some a, b with $-\infty < a < b < +\infty$) such that

$$m(E \cap J) > (1 - \epsilon)m(J).$$

4) Show that

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{itx} dx = \exp(-t^2/2)$$

5) Let $\{a_n\}$ be a positive sequence such that $\sum_n a_n b_n < \infty$ for all $\{b_n\}$, $\sum b_n^2 < \infty$, $b_n \geq 0$, then $\sum a_n^2 < \infty$.

6) Let F be a real valued function defined on $[0, 1]$ such that

- i) On some measurable set $E \subset [0, 1]$, $m(E) > \frac{1}{2}$, $F'(x)$ exists and $|F'(x)| \leq M$ for some $M > 0$.
- ii) For any finite collection of non-overlapping subintervals of $[0, 1]$, say $[x_k, y_k]$, $k = 1, \dots, n$, which satisfy $\sum_{k=1}^n (y_k - x_k) \leq \frac{1}{2}$ it is always true that $\sum_{k=1}^n |F(y_k) - F(x_k)| \leq N$, for some fixed N . Prove that $|F(1) - F(0)| \leq \frac{M}{2} + N$.