

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۰/۴/۷

موضوع امتحان: آنالیز

۱- فرض کنید  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته است به طوری که  $f'$  روی  $(0, 1)$  موجود بوده و داریم:

$$\forall x \in (0, 1) \quad , \quad |f'(x)| \leq 2$$

اگر  $f(0) = 1$  و  $f(1) = -1$ ، نشان دهید:  $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1 - 2x$

۲- تمام توابع پیوسته یکنواخت  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را بیابید به طوری که دنباله تابعی  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف شده به وسیله ضابطه  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = f(nx)$  همگرای یکنواخت روی  $\mathbb{R}$  باشد.

۳- فرض کنید  $(X, S, \mu)$  یک فضای اندازه باشد که  $\mu(X) = 1$ . برای دو عدد حقیقی  $0 < p < q$ ، گیریم:  $f \in L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu)$ . نشان دهید  $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ .

۴- فرض کنید  $(X, S, \mu)$  یک فضای اندازه است و  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع انتگرالپذیر به طوری که  $f_n \rightarrow f$  نقطه به نقطه روی  $X$ . فرض کنید برای هر  $\varepsilon > 0$ ، مجموعه اندازه پذیر  $A$ ، تابع انتگرالپذیر  $g \geq 0$  و عدد طبیعی  $n$  چنان وجود دارند که برای هر  $n \geq n_0$  داریم:

$$\int_{X \setminus A} |f_n| d\mu \leq \varepsilon \quad ,$$

$$\forall x \in A \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

نشان دهید  $f$  انتگرالپذیر است و داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0.$$

۵- فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با بعد نامتناهی است. فضای  $L(H, H)$  شامل تمامی نگاشتهای خطی پیوسته از  $H$  به خودش را با نرم زیر در نظر می گیریم:

$$\forall U \in L(H, H) \quad , \quad \|U\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \|U(z)\|.$$

الف) ثابت کنید که یک نگاشت خطی حافظ نرم از فضای باناخ  $\ell^\infty$ :

$$\ell^\infty = \{x = \{x_n\} \mid x_n \in \mathbb{R}, \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < +\infty\}$$

به  $L(H, H)$  موجود است.

ب) از آن نتیجه بگیرید که دیسک واحد  $\{U \in L(H, H) \mid \|U\| \leq 1\}$  جدائی پذیر نیست.

۶- فرض کنید  $X$  یک فضای هاسدورف فشرده است و  $C_{\mathbb{C}}(X)$  فضای باناخ متشکل از تمامی توابع مختلط پیوسته بر  $X$  همراه با نرم:

$$\forall f \in C_{\mathbb{C}}(X), \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

باشد. منظور از یک اندازه مختلط  $\mu$  روی  $X$ ، یک تابع خطی پیوسته روی فضای باناخ  $C_{\mathbb{C}}(X)$  است. حال فرض کنید که دنباله‌ای از اعضای  $C_{\mathbb{C}}(X)$  است و  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  دنباله‌ای است از اعداد مختلط. ثابت کنید برای اینکه اندازه مختلط  $\mu$  روی  $X$  با شرط  $\mu(f_n) = c_n$ ،  $\forall n \geq 0$ ، موجود باشد، لازم و کافی است که عدد حقیقی  $A > 0$  چنان موجود باشد که برای هر دنباله متناهی  $\{\lambda_k\}_{0 \leq k \leq n}$  از اعداد مختلط، داشته باشیم:

$$\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k \right| \leq A \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|.$$

(راهنمایی: قضیه هان-باناخ)

# Analysis

- 1) Suppose that  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous,  $f'(x)$  exists and  $|f'(x)| \leq 2$  for all  $x \in (0, 1)$ . If  $f(0) = 1, f(1) = -1$ , show that  $f(x) = 1 - 2x$  for all  $x \in [0, 1]$ .
- 2) Find all uniformly continuous functions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for which the sequence of functions  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $f_n(x) = f(nx)$  is uniformly convergent on  $\mathbb{R}$ .
- 3) Assume  $(X, S, \mu)$  is a measure space with  $\mu(X) = 1$ . For two real numbers  $0 < p < q$ , suppose  $f \in L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu)$ . Show that  $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ .
- 4) Let  $(X, S, \mu)$  be a measure space and  $\{f_n\}$  a sequence of integrable functions such that  $f_n \rightarrow f$  point-wise on  $X$ . Suppose that for each  $\varepsilon > 0$ , a measurable set  $A$ , an integrable function  $g \geq 0$  and a natural number  $n_0$  exist such that for all  $n \geq n_0$ ,

$$\int_{X \setminus A} |f_n| d\mu \leq \varepsilon \quad ,$$

$$\forall x \in A \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

Show that  $f$  is integrable and we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0.$$

- 5) Suppose  $H$  is an infinite-dimensional separable hilbert space. Consider the space  $L(H, H)$  of all continuous linear transformations of  $H$  to itself with the following norm.

$$\forall U \in L(H, H) \quad , \quad \|U\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \|U(z)\|.$$

- (i) Prove that there exists a norm-preserving linear map from the banach space

$$\ell^\infty = \{x = \{x_n\} \mid x_n \in \mathbb{R}, \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < +\infty\}$$

to  $L(H, H)$ .

- (ii) Deduce that the unit disk  $\{U \in L(H, H) \mid \|U\| \leq 1\}$  is *not* separable.

- 6) Suppose  $X$  is a compact Hausdorff space and  $C_{\mathbb{C}}(X)$  the banach space of all continuous complex-valued function on  $X$  with the following norm.

$$\forall f \in C_{\mathbb{C}}(X) \quad , \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

By a complex measure  $\mu$  on  $X$ , we mean a continuous linear functional on the banach space  $C_{\mathbb{C}}(X)$ .

Now let  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  be a sequence of elements of  $C_{\mathbb{C}}(X)$  and  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  a sequence of

complex numbers. Prove that for a complex measure  $\mu$  on  $X$  with  $\forall n \geq 0, \mu(f_n) = c_n$  to exist, it is necessary and sufficient that a real number  $A > 0$  exist such that for all finite sequence of complex numbers  $\{\lambda_k\}_{0 \leq k \leq n}$ , we have

$$\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k \right| \leq A \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|.$$

(Hint. Hahn-Banach's theorem.)