بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۵/۲/۸

موضوع امتحان: **آنالیز**

۱ـ الف) فرض کنیم که سطرهای آرایه

$$x_{1,1}\ ,\ x_{1,2}\ ,\ x_{1,3}\ ,\dots$$
$$x_{2,1}\ ,\ x_{2,2}\ ,\ x_{2,3}\ ,\dots$$
$$\dots\ ,\ \dots\ ,\ \dots\ ,\ \dots$$

دنباله‌های کراندار از اعداد حقیقی باشند. آنگاه یک دنباله صعودی n_1، n_2، و ... از اعداد طبیعی وجود دارد که $i = 1, 2, \dots$ $\lim\limits_{k} x_{i,n_k}$ موجود باشد.

ب) گیریم F_1، F_2، و ... دنباله‌ای از توابع نانزولی به‌طور یکنواخت کراندار (یعنی یک M و N وجود دارد به‌طوری‌که برای هر x, n $\qquad M \le F_n(x) \le N$) از راست پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشند.
ثابت کنید یک تابع نانزولی کراندار از راست پیوسته F و زیردنباله $\{F_{n_k}\}$ چنان موجود است که

$$F_{n_k}(x) \longrightarrow F(x)$$

برای هر $x \in \mathbb{R}$ که در آن F پیوسته باشد.

۲ـ فرض کنیم $f_n \longrightarrow f$ در $L^1(\mathbb{R})$ و $L^4(\mathbb{R})$ و $g_n \longrightarrow g$ در $L^\infty(\mathbb{R})$. ثابت کنید $f_n g_n \longrightarrow fg$ در $L^2(\mathbb{R})$. یعنی: $fg \in L^2(\mathbb{R})$ و $f_n g_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n f_n - gf\|_2 = 0$.

۳ـ نشان دهید که اگر $m^*(E) > 0$، آنگاه E شامل یک زیرمجموعه اندازه‌ناپذیر است. در اینجا $E \subset [0, 1]$ و m^* اندازه خارجی لبگ است.

۴ـ فضای اندازه $(X, \mathcal{F}, \mu)$ داده شده است. فرض کنیم f, f_n دو تابع مثبت اندازه‌پذیر باشند. اندازه‌های

ν, ν_n را به‌صورت

$$\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu$$

و $\qquad n = ۱, ۲, \ldots$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $n = ۱, ۲, \ldots \quad \nu_n(X) = \nu(X) < \infty$ گیریم $f_n \longrightarrow f$ روی یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر μ، آنگاه

الف) $$\sup_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A) - \nu_n(A)| \leq \int_X |f - f_n| d\mu$$

ب) $$\int_X |f - f_n| d\mu \longrightarrow ۰$$

۵ـ فرض کنیم X یک فضای باناخ و Y یک زیرفضای X باشد و $a \in X$. ثابت کنید $a \in \bar{Y}$ اگر و فقط اگر برای هر تابعک خطی کراندار روی X که $f \equiv ۰$ روی Y داشته باشیم $f(a) = ۰$.

۶ـ فرض کنیم λ و μ دو اندازه روی زیرمجموعه‌های برِل $[۰, ۱]$،

$$\mu[۰, ۱] = \lambda[۰, ۱] = ۱$$

باشد. ثابت کنید λ نسبت به μ به‌طور مطلق پیوسته و μ نسبت به λ نیز به‌طور مطلق پیوسته است اگر و فقط اگر تابع برِل اندازه‌پذیری مانند $f(x)$ روی $[۰, ۱]$، با خواص زیر موجود باشد.

الف) به‌جز روی یک مجموعه با اندازهٔ صفر μ داشته باشیم $f(x) > ۰$

ب) $$\int f(x) d\mu = ۱$$

ج) برای هر زیرمجموعه برِل $[۰, ۱]$ مانند E داشته باشیم

$$\lambda(E) = \int_E f(x) \lambda \mu$$

Analysis

1) a) Suppose that each row of the array

$$\begin{array}{l} x_{1,1}\ ,\ x_{1,2}\ ,\ x_{1,3}\ ,\dots \\ x_{2,1}\ ,\ x_{2,2}\ ,\ x_{2,3}\ ,\dots \\ \dots\ ,\ \dots\ ,\ \dots\ ,\ \dots \end{array}$$

is a bounded sequence of real numbers. Then there exists an increasing sequence $n_1, n_2, \dots$ of integers such that the limit $\lim_k x_{i,n_k}$ exists for $i = 1, 2, \dots$

b) Suppose that $F_1, F_2, \dots$ is a sequence of nondecreasing, right continuous functions on $\mathbb{R}$.

Let $\{F_n\}$ be uniformly bounded i.e. there are real numbers M and N such that for all x and n

$$M \leq F_n(x) \leq N.$$

$\{F_{n_k}\}$ Prove that there exists a subsequence and a nondecreasing, right continuous function F such that $\lim_r F_{n_k}(x) = F(x)$ at continuity points x of F.

2) $f_n \longrightarrow f$ in $L^1 Suppose that(\mathbb{R})$ and $L^4(\mathbb{R})$. Let $g_n \longrightarrow g$ in $L^\infty(\mathbb{R})$. Prove that $f_n g_n \longrightarrow fg$ in $L^2(\mathbb{R}^1)$ i.e. $\lim_{n\to\infty} \|g_n f_n - gf\|_2 = 0$, $f_n g_n$ and $fg \in L^2(\mathbb{R})$.

3) Let $E \subset [0,1]$. Show that if $m^*(E) > 0$, then there is a non-measureable subset of E.

4) Let $(X, \mathcal{F}, \mu)$ be a measure space. Suppose that f_n, f are positive measurable functions. Define measure ν_n, ν as follows

$$\begin{array}{ll} \nu_n(A) = \int_A f_n d\mu & \\ & n = 1, 2, \dots \\ \nu(A) = \int_A f d\mu & \end{array}$$

$\nu_n(X) = \nu(X) < \infty \quad n = 1, 2, \dots$ If and if $f_n \longrightarrow f$ on a set of μ-measure 0, then

a) $$\sup_{A\in\mathcal{F}} |\nu(A) - \nu_n(A)| \leq \int_X |f - f_n| d\mu$$

b) $$\int_X |f - f_n| d\mu \longrightarrow 0$$

5) Suppose that X is a Banach space and Y is a subspace of X and $a \in X$. Then $a \in \bar{Y}$ if and only if $f(a) = 0$ for every bounded linear functional on X such that $f \equiv 0$ on Y.

6) Suppose that λ and μ are two measure on Borel σ-field of $[0,1]$ such that

$$\mu[0,1] = \lambda[0,1] = 1.$$

Prove that λ is absolutely continuous with respect to μ and μ is absolutely continuous with respect to λ, if and only if there is a Borel measurable $f(x)$ on $[0,1]$ such that

a) $f(x) > 0$ except on a set of μ-measure 0.

b) $$\int f(x) d\mu = 1$$

c) For every Borel set E of $[0,1]$ we have

$$\lambda(E) = \int_E f(x) \lambda \mu.$$