

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۶،۲،۱۶

موضوع امتحان: آنالیز

(۱) در این مسئله تنها به یکی از قسمتهای (الف) یا (ب) جواب دهید.

(الف) فرض کنید $f \in C^1[0, \infty)$ و $\int_0^\infty |f(x)| dx < \infty$ و $\int_0^\infty |f'(x)| dx < \infty$. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

(ب) بیاد بیاوریم که تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ نیم پیوسته پایینی نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(x) \leq \liminf_{t \rightarrow x} f(t)$. نشان دهید که اگر f از پایین کراندار باشد آنگاه f می‌نیمم خود را بر $[a, b]$ اتخاذ می‌کند.

(۲) در این مسئله تنها به یکی از قسمتهای (الف) یا (ب) پاسخ دهید.

(الف) فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد که $\mu(X) = 1$. فرض کنید f تابع اندازه‌پذیری باشد

که $\|f\|_1 = 1$ و $0 < a \leq \|f\|_1$. نشان دهید که برای هر $0 < \lambda \leq 1$,

$$(1 - \lambda)^2 a^2 \leq \mu\{x \in X : |f(x)| \geq \lambda a\}$$

(ب) فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لبگ انتگرال‌پذیر باشد. نشان دهید که تابع بَورل اندازه‌پذیر $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

موجود است که $f = g$ تقریباً همه‌جا.

(۳) «در این مسئله هر دو قسمت را جواب دهید.»

فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. f و g را توابع اندازه‌پذیر مثبت بر X بگیرید. همچنین فرض

کنیم $0 < t < r < m < \infty$.

(الف) نامساوی

$$\left(\int f g^r d\mu\right)^{m-t} \leq \left(\int f g^t d\mu\right)^{m-r} \left(\int f g^m d\mu\right)^{r-t}$$

را تحقیق کنید در صورتی که بدانیم طرف راست متناهی است.

(ب) ثابت کنید که برای $m > 1$ داریم

$$\left(\int fg d\mu\right)^m \leq \left(\int f d\mu\right)^{m-1} \left(\int fg^m d\mu\right)$$

(۴) فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع غیرمنفی انتگرالپذیر روی مجموعه اندازه‌پذیر E باشد. همچنین فرض کنید $f_n \rightarrow f$ a.e. و تابع f روی E انتگرالپذیر است. بالاخره فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$. نشان دهید که برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر مانند A از E داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \int_A f$$

(۵) ثابت کنید که برای $a < \infty$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 (1-x)^n x^{a-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

(۶) گیریم S یک زیرفضای $L^2[0, 1]$ است و ثابت K چنان باشد که برای هر $x \in [0, 1]$ و هر $f \in S$ داشته باشیم

$$|f(x)| \leq K \|f\|_2$$

ثابت کنید که بعد S حداکثر K^2 است.

Ph.D. Entrance Examination

Analysis

1) Answer just one of the parts (a) or (b) in this question.

(a) Let $f \in C^1[0, \infty)$, $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ and $\int_0^\infty |f'(x)|dx < \infty$. Prove that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

(b) Let us recall that a function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is called lower semi-continuous if for each $x \in [a, b]$, we have $f(x) \leq \varliminf_{t \rightarrow x} f(t)$. Show that if f is bounded below, then f takes its minimum on $[a, b]$.

2) Answer just one of the parts (a) or (b) in this question.

a) Let (X, S, μ) be a measure space such that $\mu(X) = 1$. Let f be a measurable function such that $\|f\|_2 = 1$ and $0 < a \leq \|f\|_1$. Show that for each $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$(1 - \lambda)^2 a^2 \leq \mu\{x \in X : |f(x)| \geq \lambda a\}$$

b) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a Lebesgue integrable function. Show that there exists a Borel measurable function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f = g$ almost everywhere.

3) Let (X, S, μ) be a measure space. Let f and g be positive measurable functions on X and let $0 < t < r < m < \infty$.

(a) Prove that

$$\left(\int f g^r d\mu\right)^{m-t} \leq \left(\int f g^t d\mu\right)^{m-r} \left(\int f g^m d\mu\right)^{r-t}$$

provided that the right side is finite.

(b) Show that for $m > 1$ one has

$$\left(\int fg d\mu\right)^m \leq \left(\int f d\mu\right)^{m-1} \left(\int fg^m d\mu\right)$$

4) Let $\{f_n\}$ be a sequence of non-negative integrable functions on a measurable set E . Let f be integrable on E and $f_n \rightarrow f$ *a.e.* Also assume $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$. Show then that for every measurable subset A of E one has $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \int_A f$.

5) Prove that for any $a > 0$ we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 (1-x)^n x^{a-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

6) Let S be a subspace of $L^2[0, 1]$ and let K be a constant such that for every $x \in [0, 1]$ and every $f \in S$ one has $|f(x)| \leq K \|f\|_2$. Show that the dimension of S is less than or equal to K^2 .