

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۸/۲/۱۰

موضوع امتحان: آنالیز

۱- بگردید

$$S = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

ثابت کنید برای هر $f \in S$ داریم

$$\|f\|_2 \leq 2\|f'\|_2$$

که در آن $\|\cdot\|_2$ نرم در $L^2[0, 1]$ است و $C^1[0, 1]$ معرف توابع با مشتق پیوسته بر $[0, 1]$ می باشد.

۲- فرض کنید $1 < q < p$ دو عدد حقیقی بوده و E زیرمجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر از \mathbb{R} با $m(E) < \infty$ باشد (m اندازه لبگ است). فرض کنید f_n یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر روی E باشد به طوری که $f_n \rightarrow f$ a.e. و برای عدد ثابتی چون M داشته باشیم $\|f_n\|_p \leq M$. ثابت کنید $f_n \rightarrow f$ در $L^q(E)$.

۳- فرض کنیم (X, \mathcal{F}, μ) یک فضای اندازه باشد. اگر $0 \leq f$ تابعی اندازه‌پذیر باشد که رابطه $\int f^p d\mu < \infty$ برای یک $2 < p < \infty$ برقرار باشد آنگاه نشان دهید

$$\int_0^\infty \left[\int_X (y^2 \wedge f^2(x)) d\mu(x) \right] p y^{p-2} dy$$

$$= \frac{2}{2-p} \int_X f^p(x) d\mu(x).$$

در اینجا $a \wedge b = \min(a, b)$.

۴- فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد که $\mu(\Omega) = 1$. دو تابع اندازه‌پذیر حقیقی X و Y روی Ω را یکسان می‌گیریم اگر a.e. مساوی باشند. برای هر دو تابع اندازه‌پذیر f, g روی Ω تعریف کنید

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

الف) نشان دهید که d یک متر روی فضای توابع اندازه‌پذیر روی Ω است.

ب) ثابت کنید برای دنباله f_n از توابع اندازه‌پذیر رابطه $d(f_n, f) \rightarrow 0$ درست است اگر و فقط اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه یعنی برای هر $\epsilon > 0$

$$\mu\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \epsilon\} \rightarrow 0 \text{ وقتی که } n \rightarrow \infty.$$

پ) ثابت کنید فضای توابع اندازه‌پذیر با متر d یک فضای متری کامل است.

۵- فرض کنید X یک فضای باناخ بوده و X^* فضای متشکل از کلیه تابعکهای خطی پیوسته بر X . چنانکه می‌دانیم X^* یک فضای باناخ است هرگاه نرم در آن به صورت زیر تعریف شود: برای $x^* \in X^*$ تعریف کنید

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

فرض کنید μ یک اندازه مثبت بر یک مجموعه Ω بوده و $1 \leq p < \infty$ و بعلاوه $f : \Omega \rightarrow X$ تابعی باشد که برای هر $x^* \in X^*$ داشته باشیم $x^* \circ f \in L^p(\mu)$. نشان دهید

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \int_{\Omega} |x^* \circ f|^p d\mu < \infty$$

۶- فرض کنید $C_c(\mathbb{R})$ فضای متشکل از کلیه توابع حقیقی پیوسته f بر \mathbb{R} باشد که هر یک در خارج از بازه‌ای به شکل $[a, b]$ صفر باشد. می‌توان نشان داد که $C_c(\mathbb{R})$ در $L^1(\mathbb{R})$ چگال است. همچنین اگر f تابعی اندازه‌پذیر بر \mathbb{R} باشد می‌توان نشان داد که توابع $(x, y) \mapsto f(x - y)$ و $(x, y) \mapsto f(x + y)$ بر \mathbb{R}^2 اندازه‌پذیر هستند (اینها را ثابت نکنید).

الف) برای $f \in L^1(\mathbb{R})$ اولاً ثابت کنید که برای هر $a \in \mathbb{R}$ تابع $L_a f$ تعریف شده با $(L_a f)(x) = f(a + x)$ در $\|L_a f\| = \|f\|$ صدق می‌کند و سپس ثابت کنید که نگاشت

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \\ a \longmapsto L_a f \end{cases}$$

پیوسته می‌باشد.

ب) برای $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ اولاً بگوئید که چرا برای تقریباً تمامی x ها تابع $y \mapsto f(x - y)g(y)$ انتگرال‌پذیر است. سپس تابع $f * g$ را با ضابطه

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy$$

تعریف کنید (جاهائی که انتگرال سمت راست موجود نیست $(f * g)(x)$ مساوی صفر تعریف شود). سپس نشان دهید که این تابع اندازه‌پذیر بوده در $L^1(\mathbb{R})$ است.

پ) قرار دهید $\phi_n = \frac{1}{n} \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$ که χ تابع مشخصه است. نشان دهید که برای هر $f \in L^1(\mathbb{R})$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n * f - f\| = 0$$

Analysis

1) Let

$$S = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Show that for all $f \in S$ we have

$$\|f\|_2 \leq 2\|f'\|_2$$

where $\|\cdot\|_2$ is the norm in $L^2[0,1]$ and $C^1[0,1]$ denotes the space of continuously differentiable functions on $[0,1]$.

2) Let $1 < q < p$ be real numbers and let E be a Lebesgue measurable subset of \mathbb{R} with $m(E) < \infty$ (m is the Lebesgue measure). Let f_n be a sequence of measurable functions on E such that $f_n \rightarrow f$ a.e. and for some $M > 0$, $\|f_n\|_p \leq M$. Show that $f_n \rightarrow f$ in $L^q(E)$.

3) Let (X, \mathcal{F}, μ) be a measure space. if $f \geq 0$ is measurable and if the relation $\int f^p d\mu < \infty$ holds for some $0 < p < 2$, then show

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\int_X (y^2 \wedge f^2(x)) d\mu(x) \right] p y^{p-3} dy \\ = \frac{2}{2-p} \int_X f^p(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

in which $a \wedge b = \min(a, b)$.

4) Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ be a measure space such that $\mu(\Omega) = 1$. Two real-valued functions X and Y on Ω are taken identical if they are equal a.e. For two measurable functions f and g on Ω define

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

a) Show that d is a metric on the measurable functions.

b) Show that for a sequence (f_n) of measurable functions the relation $d(f_n, f) \rightarrow 0$ holds if and only if $f_n \rightarrow f$ in measure that is for every $\epsilon > 0$,

$$\mu\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \epsilon\} \rightarrow 0$$

when $n \rightarrow \infty$.

c) Show that the space of measurable functions is complete with the metric d .

- 5) let X be a Banach space and let X^* denote the space of continuous linear functionals on X . We know that X^* is a Banach space under the norm defined by: for $x^* \in X^*$,

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Let μ be a positive measure on a set Ω and let $1 \leq p < \infty$. Further assume that $f : \Omega \rightarrow X$ is a function such that for all $x^* \in X^*$, $x^* \circ f \in L^p(\mu)$. Show that

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \int_{\Omega} |x^* \circ f|^p d\mu < \infty$$

- 6) Let $C_c(\mathbb{R})$ be the space of all continuous functions on \mathbb{R} each of which vanishing outside of an interval $[a, b]$. One can show that $C_c(\mathbb{R})$ is dense in $L^1(\mathbb{R})$. One can also show that for every measurable function f on \mathbb{R} , the functions $(x, y) \mapsto f(x+y)$ and $(x, y) \mapsto f(x-y)$ are measurable on \mathbb{R}^2 (Do not prove these here!).

- a) For $f \in L^1(\mathbb{R})$ first show that for every $a \in \mathbb{R}$ the function $L_a f$ defined by $(L_a f)(x) = f(a+x)$ satisfies $\|L_a f\| = \|f\|$; then show that the map

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \\ a \longmapsto L_a f \end{cases} \quad \text{is continuous.}$$

- b) For $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, first explain why for almost all x , the function $y \mapsto f(x-y)g(y)$ is integrable. Then define the function $f * g$ on \mathbb{R} by

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

(for those x where the integral does not exist, define $(f * g)(x)$ to be zero).

Explain why this function is measurable and prove that it belongs to $L^1(\mathbb{R})$.

- c) Define $\phi_n = \frac{2}{n}\chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$ where χ is the characteristic function. Show that for every $f \in L^1(\mathbb{R})$ we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n * f - f\| = 0$$