بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۱٫۳٫۲**

موضوع امتحان: **ترکیبیات**

(۱۰ نمره) ۱ـ (الف) فرض کنید D_n تعداد مثلث‌بندیهای مختلف از یک nـضلعی محدب باشد. (یک مثلث‌بندی عبارت است از $n-3$ قطر که در داخل nـضلعی همدیگر را قطع نکنند و در نتیجه آن‌را به $n-2$ مثلث افراز نمایند). مقدار D_n را پیدا کنید.

(ب) ثابت کنید هر گراف دوبخشی G با L یال دارای یک تطابق با حداقل $\frac{L}{\Delta(G)}$ یال است که در آن $\Delta(G)$ ماکزیمم درجه رأسهای G است.

(۱۲ نمره) ۲ـ (الف) شرایط لازم و کافی برای وجود یک سیستم سه‌گانه اشتاینر، $STS(v)$ را ذکر کنید.

(ب) دو نمونه از روشهای ساختن سیستمهای سه‌گانه اشتاینر به طریقه‌های زیر است:

$$STS(v) \longrightarrow STS(3v) \qquad (1)$$

$$STS(v) \longrightarrow STS(2v+1) \qquad (2)$$

یکی از این روشها را توضیح بدهید.

(ج) نشان دهید که حتی با دردست داشتن تعداد متناهی از $STS(v)$ها نمی‌توان فقط با استفاده از دو روش ساختاری فوق، کلیه سیستم‌های سه‌گانه اشتاینر را به‌دست آورد.

(۱۰ نمره) ۳ـ گیریم A یک ماتریس مربعی با درایه‌های ۰ و ۱ و از اندازهٔ n باشد. **رتبهٔ جمله‌ای** A به‌صورت ماکزیمم تعداد ۱ هایی که هیچ دوتای آن‌ها در یک سطر یا در یک ستون نیستند، تعریف می‌شود و با $TR(A)$ نشان داده می‌شود. ثابت کنید:

$$TR(A) \geq Rank(A)$$

که در آن $Rank(A)$ همان **رتبهٔ** ماتریس A است.

آیا عکس این نامساوی نیز درست است؟ (چرا؟)

(۸ نمره) ۴ـ یک $(4l-1, 2l-1, l-1)-2$ طرح بلوکی را یک **طرح هادامار** گویند.

(یعنی یک BIBD با پارامترهای $v = 4l-1,\quad k = 2l-1,\quad \lambda = l-1$).

(الف) نشان دهید که هر طرح هادامار یک طرح متقارن است.

(ب) اگر $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$ خانوادهٔ بلوکهای یک طرح هادامار باشد، خانوادهٔ زیرمجموعه‌های زیر که از عمل تفاضل متقارن روی بلوکهای $\mathcal{B}$ به‌دست می‌آید را درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{B}' = \{B_i \Delta B_j \mid i \neq j, B_i, B_j \in \mathcal{B}\}.$$

آیا این خانواده نیز تشکیل یک BIBD می‌دهد؟ (چرا؟).

اگر جواب مثبت است پارامترهای آن را بنویسید.

(۱۲ نمره) ۵ـ مجموعه رأسهای گراف کامل ۸ رأسی K_8 را مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 8\}$ بگیرید. دو نوع رنگ‌آمیزی معتبر از یالهای K_8 (با ۷ رنگ) را ارایه بدهید که یکریخت نباشند. (دو رنگ‌آمیزی یالی را **یکریخت** گوییم هرگاه با یک جایگشت روی رنگها اولی به دومی تغییر یابد.) برای معرفی یالها از نمادهائی مانند ۱۲، ۱۳، و الی آخر استفاده کنید.

(۸ نمره) ۶ـ آیا گرافی مسطح، ۱۸ رأسی، ۳ـــ منتظم و با اندازهٔ کمرِ ۵ وجود دارد؟ (چرا؟)

(**اندازه کمر** یک گراف اندازهٔ کوچکترین دور در آن است.)

Combinatorics

(10 points) 1. a) Let D_n be the number of distinct triangulations of a convex n–gon. Find D_n. (A triangulation consists of $n-3$ diagonals which do not meet inside the n–gon and, therefore, divide the n–gon into $n-2$ triangles.)

b) Prove that any bipartite graph G with L edges has a matching of size at least $\frac{L}{\Delta(G)}$ (i.e. the matching has at least $\frac{L}{\Delta(G)}$ edges in which $\Delta(G)$ is the maximum degree of G.).

(12 points) 2. a) State necessary and sufficient conditions for the existence of a Steiner Triple System of order v, $STS(v)$.

b) Explain *one* of the following methods of construction for new Steiner Triple Systems from a given $STS(v)$.

$$STS(v) \longrightarrow STS(3v),$$

$$STS(v) \longrightarrow STS(2v+1).$$

c) Show that, even with a given finite number of Steiner Triple Systems, it is not possible to construct all Steiner Triple Systems by the two aforementioned methods.

(10 points) 3. Let A be a square $(0,1)$–matrix of order n. The term rank of A, $TR(A)$, is defined to be the maximum number of 1's such that no two of them are in the same row or the same column of A. Prove that

$$TR(A) \geq Rank(A),$$

where $Rank(A)$ is the ordinary rank of A.
Does the reverse inequality also hold? (Why?)

(8 points) 4. A $2-(4l-1, 2l-1, l-1)$ design is called a Hadamard design. (i.e. a BIBD with parameters $v = 4l-1,\ k = 2l-1,\ \lambda = l-1$).

a) Show that any Hadamard design is a symmetric design.

b) Let $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$ be the set of blocks of a Hadamard design. Consider the set of all possible symmetric differences of B_i's, i.e.

$$\mathcal{B}' = \{B_i \Delta B_j \mid B_i, B_j \in \mathcal{B}\}.$$

Does this family of new subsets also form a BIBD? (Why?) If your answer is YES then compute the corresponding parameters.

(12 points) 5. Let $\{1, 2, \dots, 8\}$ be the vertex set of the complete graph K_8. Introduce two nonisomorphic proper edge-colourings for K_8 (with 7 colours). (Two proper colourings is called isomorphic if one of them is obtained by a permutation of colours on the other.)

(8 points) 6. Does there exist a 3-regular planar graph on 18 vertices whose girth is 5. (The girth of a graph is the size of its shortest cycle.)