بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۹٫۳٫۲۷

موضوع امتحان: **معادلات دیفرانسیل**

۱- فرض کنید $u(x,t)$ یک جواب $c^{۲}$ معادله موج ذیل است.

$$u_{tt} - c^{۲} u_{xx} = \phi(x,t) \qquad -\infty < x < \infty,\ t > ۰$$

برای نقطه $(x_۰, t_۰)$ با $t_۰ > ۰$ ناحیه $D_{(x_۰,t_۰)}$ را داخل مثلثی که به‌وسیله محور xها و دو خط $x \pm ct = x_۰ \pm ct_۰$ مشخص می‌گردد، در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید

$$\int_{\partial D_{(x_۰,t_۰)}} -c^{۲} u_x dt - u_t dx = \iint_{D_{(x_۰,t_۰)}} \phi(x,t) dx\ dt$$

ب) با استفاده از فرمول قسمت (الف) ثابت کنید اگر $t > ۰$، داریم

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{۱}{۲}[u(x+ct,۰) + u(x-ct,۰)] \\ &+ \tfrac{۱}{۲c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(s,۰) ds + \tfrac{۱}{۲c} \int_{D_{(x,t)}} \phi(s,\tau) ds\ d\tau \end{aligned}$$

۲- یک شرط لازم و کافی برحسب ضرایب ثابت A، B و ...، F ارائه دهید تا دستگاه ذیل پایدار مجانبی سراسری باشد.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A\dot{x} + B\dot{y} + Cx + Dy \\ \ddot{y} &= E\dot{y} + Fy \end{aligned}$$

۳- سری فوریه تابع $|x| < \pi$، $f(x) = x$، $f(x+۲\pi) = f(x)$ را به‌دست آورید و با استفاده از آن سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}$ را محاسبه کنید.

۴- فرض کنید $h(x)$ روی R پیوسته است. فرض کنید M فضای توابع پیوسته روی $[۰, L]$ با نرم یکنواخت است. فرض کنید K نگاشتی از M به M است که با

$$(Kf)(x) = \int_{۰}^{x} h(u) f(u) du + a$$

الف) نشان دهید K یک نگاشت انقباضی است اگر L کوچک باشد.

ب) نشان دهید مسئله

$$\frac{dy}{dx} = h(x)y(x) \quad , \quad y(0) = a$$

برای L کوچک دارای جوابی یگانه روی $[0, L]$ است.

۵ـ فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای فرد از x با ضرایب مثبت است. ثابت کنید معادله $\ddot{x} + P(x) = 0$ دارای بی‌نهایت جواب تناوبی است.

۶ـ فرض کنید $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ دو جوای مستقل خطی معادله خطی ذیل است:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad , \quad a(t), b(t) \in C(R)$$

الف) نشان دهید $|\phi_1(t)| + |\phi_2(t)| \neq 0$ برای تمام $t \in R$.

ب) فرض کنید $t_1 < t_2$ و $\phi_1(t_1) = \phi_1(t_2) = 0$. ثابت کنید $t_1 < t_3 < t_2$ موجود است به‌طوری که $\phi_2(t_3) = 0$.

Differential Equations

1) Let $u(x,t)$ be a c^2 solution of the wave equation

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \phi(x,t) \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

For a point $(x_0, t_0), t_0 > 0$, let $D_{(x_0,t_0)}$ be the triangular domain defined by the x-axis and the lines $x \pm ct = x_0 \pm ct$. Prove that

a)

$$\int_{\partial D_{(x_0,t_0)}} -c^2 u_x dt - u_t dx = \iint_{D_{(x_0,t_0)}} \phi(x,t) dx\ dt$$

b) Using the formula in (a), prove that if $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \tfrac{1}{2}[u(x+ct,0) + u(x-ct,0)] \\ &+ \tfrac{1}{2c}\textstyle\int_{x-ct}^{x+ct} u_t(s,0)ds + \tfrac{1}{2c}\int_{D_{(x,t)}} \phi(s,\tau)ds\ d\tau \end{aligned}$$

2) Give a necessary and sufficient condition in terms of the constants coefficients $A, B, \ldots, F$, for asymtotic stability of the system

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A\dot{x} + B\dot{y} + Cx + Dy \\ \ddot{y} &= E\dot{y} + Fy \end{aligned}$$

3) Calculate the Fourier Series of the function $f(x) = x$, $|x| < \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$. By using this Fourier Series evalute $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4) Let $h(x)$ be continuous on R. Let M be the sapce of continous functions on $[0, L]$, in the uniform norm. Let K be the mapping from M to M given by

$$(Kf)(x) = \int_0^x h(u)f(u)du + a$$

a) Show that K is a contraction mapping if L is small.

b) Show that the problem

$$\frac{dy}{dx} = h(x)y(x) \quad , \quad y(0) = a$$

has a unique solution on $[0, L]$ for L small enough.

5) Let $P(x)$ be an odd polynomial function of x with positive coefficients. Prove that the equation

$$\ddot{x} + P(x) = 0$$

has infintely many periodic solutions.

6) Let $\phi_1(t)$ and $\phi_2(t)$ be two independent solutions of the linear equation

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad , \quad a(t), b(t) \in C(R)$$

a) Show that $|\phi_1(t)| + |\phi_2(t)| \neq 0$ for all $t \in R$.

b) Let $t_1 < t_2$ and $\phi_1(t_1) = \phi_1(t_2) = 0$. Prove that there is $t_1 < t_3 < t_2$ with $\phi_2(t_3) = 0$.