

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۰/۴/۸

موضوع امتحان: معادلات دیفرانسیل

۱- مطلوبست محاسبه فاصله موجودیت جواب برای معادله زیر:

$$\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

۲- مقدار k را چنان به دست آورید که جواب معادله زیر:

$$y'' + (x + 1 - k)y = 0$$

دارای حداقل یک ریشه در فاصله $(0, \pi)$ باشد.

۳- وضعیت نقطه ایستا معادله:

$$\begin{cases} x' = -4 + y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$$

را مشخص کنید و منحنی نمایش جواب معادله را رسم نمایید.

۴- وضعیت نقطه ایستا معادله:

$$\begin{cases} x' = x(3 - x - 2y) \\ y' = y(2 - x - y) \end{cases}$$

را مشخص کنید و منحنی نمایش جواب معادله را رسم نمایید.

۵- نقطه مادی به جرم $m = 1$ با همیلتونی $H = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ در حال حرکت می باشد. مطلوبست تعیین نقاط ایستا و نوع آن و همچنین رسم منحنی نمایش سیستم.

۶- مطلوبست محاسبه نقاط ایستا و رسم منحنی جواب سیستم زیر:

$$\begin{cases} x' = y - y^3 \\ y' = -x - y^2 \end{cases}$$

۷- برای معادله $x'' + \cos x = 0$ با شرایط سرحدی $x(0) = x(1) = 0$ شرایط کافی وجود جواب را از راه محاسبه تابع گرین به دست آورید.

۸- منیفلد پایدار را تعریف نموده و برای دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + x^2 \end{cases}$$

منیفلد پایدار را حساب نمایید.

Differential Equation

- 1) Find the interval of the existence of solution for the following initial value problem

$$\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- 2) Find k such that the following equation has at least one root in $(0, \pi)$:

$$y'' + (x + 1 - k)y = 0$$

- 3) Determine the nature of the singular point of the following system and then graph the solution of the system

$$\begin{cases} x' = -4x + y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$$

- 4) Determine the nature of the singular point of the following system and then graph the solution of the system

$$\begin{cases} x' = x(3 - x - 2y) \\ y' = y(2 - x - y) \end{cases}$$

- 5) A point with $m = 1$ and Hamiltonian $H = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ is moving. Determine the nature of the singular point of the system and then graph the solution of the system.

- 6) Determine the nature of the singular point of the following system and then graph the solution of the system

$$\begin{cases} x' = y - y^3 \\ y' = -x - y^2 \end{cases}$$

- 7) Given the following system

$$x'' + \cos x = 0$$

with the boundary conditions $x(0) = x(1) = 0$. Find the sufficient conditions for the existence of solution by Green's function.

- 8) Define the stable manifold and find the stable manifold for the following system

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + x^2 \end{cases}$$