

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۱/۳/۴

موضوع امتحان: معادلات دیفرانسیل

۱- معادله انتقال حرارت را در یک میله به طور واحد با شرایط اولیه-مرزی داده شده به طور کامل حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1$$

$$u_x(0, t) = 1$$

$$u(1, t) = \frac{t^2}{4}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

۲- الف) نشان دهید معادله دیفرانسیل زیر دارای جواب تناوبی است

$$x'' + x + \epsilon x^3 = 0 \quad \epsilon > 0$$

ب) جواب تناوبی این معادله را با شرایط اولیه $x(0) = A$, $x'(0) = 0$ به طور تقریبی تا مرتبه $(O(\epsilon^2))$ به دست آورید.

۳- در پایداری نقاط سکون (بحرانی) معادله دیفرانسیل زیر بحث کنید و منحنی (منحنی‌های) جواب را در صفحه فاز (صفحه حالت) رسم کنید.

$$x'' + x' + x - x^3 = 0$$

۴- دستگاه معادلات زیر داده شده‌اند.

$$x' = y + \alpha x(x^2 + y^2)$$

$$y' = -x + \alpha y(x^2 + y^2)$$

الف) نشان دهید $(0, 0)$ تنها نقطه تعادل است.

ب) نشان دهید برای $\alpha < 0$ مبدأ پایدار مجانبی و برای $\alpha > 0$ مبدأ ناپایدار است.

پ) در پایداری نقطه (نقاط) تعادل در حالت $\alpha = 0$ بحث کنید.

۵- معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر برای تابع $u = u(x, y)$ داده شده

$$2y(u - 3)p + (2x - u)q = y(2x - 3), \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

معادله رویه انتگرالی این معادله را که دایره

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2x$$

روی آن قرار دارد به دست آورید.

Differentioanl Equations

- 1) Solve the heat equation for a bar of unit length with given initial and boundary conditions

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (0, 1)$$

$$u_x(0, t) = 1$$

$$u(1, t) = \frac{t^2}{2}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

- 2) a) Show the following differential equation has a periodic solution

$$x'' + x + \epsilon x^3 = 0 \quad \epsilon > 0$$

b) Determine its approximate periodic solution up to the order of $O(\epsilon^2)$.

- 3) Discuss the critical points of the given differential equation and draw its trajectories in the phase-plane.

$$x'' + x' + x - x^3 = 0$$

- 4) Consider the system of differential equations

$$x' = y + \alpha x(x^2 + y^2)$$

$$y' = -x + \alpha y(x^2 + y^2)$$

- a) Show $(0, 0)$ is the only critical point.
- b) Prove for $\alpha < 0$ the origin is asymptotically stable while for $\alpha > 0$ the origin is unstable.
- c) Disuss the stability of the citical point for the case $\alpha = 0$.
- 5) Given the first order partial differential equation for $u = u(x, y)$

$$2y(u - 3)p + (2x - u)q = y(2x - 3), p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

determine the integral surface passing through the circle

$$u = 0, \quad x^2 + y^2 = 2x$$