بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

# آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۹٫۳٫۲۶

موضوع امتحان: **هندسه**

۱ـ $X$ و $Y$ فضاهای متریک هستند و $f : X \to Y$. زیرمجموعهٔ $L(f)$ از $Y$ مجموعهٔ نقاط $y \in Y$ است که برای آن دنباله‌ای $(x_n)$ در $X$ وجود دارد که $(x_n)$ هیچ زیردنبالهٔ همگرا ندارد ولی $f(x_n) \to y$. نشان دهید اگر $f$ یک‌به‌یک و پیوسته باشد، شرطی لازم و کافی برای این که $f$ یک همسانریختی $X$ با $f(X)$ (با توپولوژی القا شده از $Y$) باشد این است که $f(X) \cap L(f) = \emptyset$.

۲ـ روی $\mathbb{R}^۲ - \{(۰,۰)\}$ یک متریک ریمانی هموار (فرم بنیادی اول) در نظر گرفته‌ایم که نسبت به آن انحنای گاوسی همه‌جا ناصفر است. نشان دهید هر دو ژئودزیک بسته که $(۰,۰)$ در درون هر دو باشد لزوماً یکدیگر را قطع می‌کنند.

۳ـ $M$ و $N$ خمینه‌های هموار هستند و $f : M \to N$ یک نگاشت هموار. فرض کنید زیرمجموعهٔ فشرده $K$ از $M$ طوری است که تحدید $f$ به $K$ یک‌به‌یک است و نیز هر $T_x f$، به‌ازای $x \in K$، یک‌به‌یک می‌باشد. نشان دهید یک زیرمجموعه باز $M$ شامل $K$ وجود دارد که $f$ روی آن زیرمجموعه یک‌به‌یک است.

۴ـ $X$ یک میدان برداری هموار و $\alpha$ یک ۱ـفرم هموار روی $\mathbb{R}^۲$ هستند که $L_X\alpha = ۰$ و $\alpha(X)$ همه‌جا ناصفر است. نشان دهید تابعی هموار $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $df = \frac{\alpha}{\alpha(X)}$.

۵ـ $M$ یک خمینه هموار $m$ بعدی است و $X_۱, \ldots, X_m$ میدانهای برداری هموار روی $M$ که به‌ازای هر $x \in M$، $X_۱(x), \ldots, X_m(x)$ مستقل خطی هستند و $[X_i, X_j] = ۰$ برای هر زوج $j, i$. نشان دهید برای هر $p \in M$، نقشهٔ $(U, \xi)$ حول $p$ وجود دارد که $\xi(p) = ۰ \in \mathbb{R}^m$ و $\xi_*(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. (در اینجا $\frac{\partial}{\partial x_۱}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ میدانهای برداری واحد استاندارد $\mathbb{R}^m$ هستند.)

۶ـ $S$ دایرهٔ واحد $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه است، $j : S \hookrightarrow \mathbb{R}^۲$ نگاشت جزئیت، و $\sigma = j^*(xdy - ydx)$. نشان دهید هر یک از دو تابع $f$ و $g$ زیرمجموعهٔ $S$ را به خود آن می‌نگارند (ساده) و انتگرالهای $\int_S f^*\sigma$ و $\int_S g^*\sigma$ را محاسبه کنید.

$$f(x,y) = (x^۳ - ۳xy^۲, ۳x^۲y - y^۳)\ ,\ g(x,y) = \left(\frac{\sqrt{۱ + x^۲}}{\sqrt{۲ + x^۲ + y^۲}}, \frac{\sqrt{۱ + y^۲}}{\sqrt{۲ + x^۲ + y^۲}}\right)$$

# Geometry

**1)** Let $X$ and $Y$ be metric spaces and $f : X \to Y$. Define the subset $L(f)$ of $Y$ to be set of $y \in Y$ for which there exists a sequence $(x_n)$ in $X$ with no convergent subsequence and $f(x_n) \to y$ as $n \to +\infty$. If $f$ is one-one and continuous, show that $f$ is a homeomorphism onto $f(X)$ (with induced topology from $Y$) if and only if $f(X) \cap L(f) = \emptyset$.

**2)** We consider a smooth Riemannian metric (first fundamental form) on $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ for which the Gaussian curvature is everywhere non-zero. Show that any two closed geodesies which have $(0,0)$ in their interiors must intersect.

**3)** let $M$ and $N$ be smooth manifolds and $f : M \to N$ a smooth map. Suppose $K$ is a compact subset of $M$ such that the restriction of $f$ to $K$ is one-one and each $T_x f$, for $x \in K$, is also one-one. Show that there is an open neighborhood $U$ of $K$ so that the restriction of $f$ to $U$ is one-one.

**4)** $X$ is a smooth vectorfield and $\alpha$ a smooth one-form on $\mathbb{R}^2$ such that $L_X \alpha = 0$ and $\alpha(X)$ is everywhere non-zero. Show that there exists a smooth function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so that $\frac{\alpha}{\alpha(X)} = df$.

**5)** $M$ is a smooth $m$-manifold and $X_1, \ldots, X_m$ smooth vectorfields on $M$ which are everywhere linearly-independent and $[X_i, X_j] = 0$ for all $i, j$. Show that for every $p \in M$, there exists a chart $(U, \xi)$ around $p$ with $\xi(p) = 0$ and $\xi_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. (Here $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ are the standard unit vectorfields on $\mathbb{R}^m$).

**6)** Let $S$ be the unit circle $x^2 + y^2 = 1$, $j : S \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ the inclusion map, and $\sigma = j^*(xdy - ydx)$. Show that each of the maps $f$ and $g$ defined below map $S$ to itself (easy), and compute the intergrals $\int_S f^*\sigma$ and $\int_S g^*\sigma$.

$$f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)\ ,\ g(x,y) = \left( \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2+y^2}}, \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{2+x^2+y^2}} \right)$$