بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۰٫۴٫۷

موضوع امتحان: **هندسه**

۱ـ $\mathbb{C}\mathrm{P}(۱)$، فضای افکنشی مختلط یک بعدی را به‌طور دقیق تعریف کنید و نشان دهید با کرهٔ دوبعدی واحد در $\mathbb{R}^۳$ همسانریخت است. اگر a, b, c, d اعداد مختلط باشند و $ad - bc \neq ۰$، توضیح دهید به چه مفهومی $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ یک همسانریختی از کرهٔ دوبعدی به خود آن ایجاد می‌کند.

۲ـ دایرهٔ به مرکز $(a, ۰)$ و شعاع b، $b < a$، در صفحهٔ xy را در فضا حول محور y دوران می‌دهیم تا یک چنبره T پدید آید. خطوط انحنای این چنبره را مشخص کنید. نشان دهید T فاقد نقطه نافی است.

۳ـ فرض کنید M خمینه‌ای هموار است و X یک میدان برداری روی آن. تابع $۰ \neq f \in C^{\infty}(M)$ را **تابع ویژهٔ** X می‌نامیم اگر عدد حقیقی α موجود باشد به‌طوری که $L_X f = \alpha f$. در این صورت α یک **مقدار ویژهٔ** X نام دارد.

ثابت کنید اگر خمینهٔ M فشرده باشد آنگاه برای هر میدان برداری X تمامی مقادیر ویژهٔ نظیر آن، صفر هستند.

۴ـ فرض کنید M خمینه‌ای هموار است و X میدانی برداری روی آن به‌طوری که $[X, Y] = ۰$ برای هر میدان برداری Y روی M. ثابت کنید $X = ۰$.

۵ـ فرض کنید ω یک ۱ـفرم روی $S^۲$ است. اگر ω تحت تمامی اعضای $SO(۳)$ ناوردا باشد نشان دهید $\omega = ۰$.

۶ـ فرض کنید $f : S^n \to \mathbb{T}^n$ نگاشتی هموار است و $n > ۱$. ثابت کنید برای هر nـفرم α روی $\mathbb{T}^n$ داریم $\int_{S^n} f^* \alpha = ۰$. ($\mathbb{T}^n$ چنبرهٔ n بعدی $S^۱ \times \cdots \times S^۱$ است.)

Geometry

1) Precisely define $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, the one-dimensional complex projective space, and show that it is homeomorphic to the unit 2-dimensional sphere in $\mathbb{R}^3$. If a, b, c, d are complex numbers and $ad - bc \neq 0$, explain that in what sense, the map $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ induces a self-homeomorphism of the 2-sphere.

2) Consider the circle of radius b in the xy-plane centered at $(a, 0), b < a$, and rotate it in the space around the y-axis to develope a torus $\mathbb{T}$. Determine the lines of curvature of this torus. Show that $\mathbb{T}$ lacks umbilical points.

3) Assume M is a smooth manifold and X a vector field on it. We call a function $0 \neq f \in C^\infty(M)$ an *eigen-function of* X if there is a real number α such that $L_X f = \alpha f$. Such an α is called an *eigen-value of* X.

Prove that if M is compact, then all eigenvalues of any vector field X are zero.

4) Suppose M is a smooth manifold and X a vector field on it such that $[X, Y] = 0$ for all vector fields Y on M. Prove that $X = 0$.

5) Let ω be a 1-form on S^2. If ω is invariant under the action of all the elements of $SO(3)$ on S^2, show that $\omega = 0$.

6) Let $f : S^n \to \mathbb{T}^n$ be a smooth map and $n > 1$. Show that for any n-form α on $\mathbb{T}^n$ we have $\int_{S^n} f^*\alpha = 0$.

($\mathbb{T}^n$ is the n-dimensional torus $S^1 \times \cdots \times S^1$.)