بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۵٫۲٫۹

موضوع امتحان: **هندسه**

۱ـ خم $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

که در اینجا $a \neq 0$ و b اعداد حقیقی داده شده‌اند. انحناء و تاب این خم را محاسبه کنید. کلیهٔ خمهای هموار $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را توصیف کنید که انحناء و تاب آنها ثابت است.

۲ـ نگاشت خطی وارونپذیری $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ مفروض است. مقصود از f^n ترکیب $f \circ \cdots \circ f$، n بار، است (برای $n = 0$، همانی$= f^0$، و برای n منفی، به‌جای f، وارون f را با خود ترکیب می‌کنیم). روی مجموعهٔ $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$، رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x \sim y$ اگر و تنها اگر عدد صحیح n وجود داشته باشد که $f^n(x) = y$

مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی را به X نمایش می‌دهیم و روی آن توپولوژی خارج قسمت را منظور می‌کنیم.

الف) آیا نگاشت خارج قسمت $q : U \longrightarrow X$ (q، به هر عضو U، ردهٔ هم‌ارزی آن را نسبت می‌دهد) باز است؟

ب) شرایطی معقول روی f منظور کنید که X هاوسدرف شود.

ج) شرایطی معقول روی f منظور کنید که X فشرده شود.

۳ـ کرهٔ واحد nـبعدی را به S^n نمایش می‌دهیم. نشان دهید $S^n \times \mathbb{R}$ توازی‌پذیر است (یعنی کلاف مماس آن، به‌عنوان کلاف برداری، با کلاف حاصلضرب $(S^n \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$، یکریخت است).

۴ـ یک خمینهٔ هموار (بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) است و $\mathcal{F}_M$ مجموعهٔ تابعهای هموار از M به $\mathbb{R}$. یک نگاشت $\mathbb{R}$ـخطی $\delta : \mathcal{F}_M \to \mathcal{F}_M$ را یک **وابرش** می‌نامیم در صورتی که

$$\forall\, f, g \in \mathcal{F}_M :\ \ \delta(f, g) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g)$$

الف) نشان دهید $(\delta(f))(x)$ فقط به مقادیر f در یک همسایگی به دلخواه کوچک x بستگی دارد.

ب) فرض کنید δ یک وابرش داده شده برای M باشد و N یک زیرخمینهٔ باز M. نشان دهید وابرش منحصر به فردی $\bar{\delta}$ برای N وجود دارد که هرگاه $f \in \mathcal{F}_M$، آنگاه:

$$\bar{\delta}(f|_N) = \delta(f)|_N$$

۵ـ P یک اَبر صفحهٔ (زیرفضای مستوی $(n-۱)$ـبُعدی در $\mathbb{R}^n$ است. اَبر صفحهٔ مختصاتی که از حذف کردن محور x_j در $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آید به P_j نمایش می‌دهیم. روی P و P_jها عنصر حجم القاء شده از متریک متداول $\mathbb{R}^n$ را منظور می‌کنیم. فرض کنید M یک زیرخمینهٔ $(n-۱)$ـبُعدی لبه‌دار فشرده از P باشد و تصویر قائم آن روی P_j را به M_j نمایش دهید. اگر V و V_j به‌ترتیب حجمهای $(n-۱)$ـبُعدی M و M_j باشند، نشان دهید:

$$V^۲ = V_۱^۲ + \cdots + V_n^۲$$

۶ـ میدانهای برداری A و B در $\mathbb{R}^۳$ به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$A = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{و} \qquad B = (y+۱)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

الف) آیا می‌توان تعویض مختصاتی هموار $h : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ یافت که $A = h_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ و $B = h_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$؟

ب) آیا رویه‌ای (زیرخمینه‌ای دوبُعدی) در $\mathbb{R}^۳$ وجود دارد که A و B هر دو بر آن مماس باشند؟

Geometry

1) Define the curve $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ by:

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

where $a \neq 0$ and b are given real numbers. Compute the curvature and torsion of this curve. Describe **all** smooth curves $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ with constant curvature and torsion.

2) An invertible linear map $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ is given. By f^n we denote the n-fold composition $f \circ \cdots \circ f$ (for $n = 0$, f^0 =identity, and for negative n, we use f^{-1} instead of f). We define an equivalence relation $\sim$ on $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ by:

$$x \sim y \text{ if and only if } \exists \text{ integer } n \text{ with } f^n(x) = y.$$

We denote the set of equivalence classes by X and endow X with the quotient topology.

a) Is the quotient map $q : U \longrightarrow X$ open? (q assigns to each element of U, its equivalence class.)

b) Give reasonable condition(-s) on f to make X Hausdorff.

c) Give reasonable condition(-s) on f to make X compact.

3) We denote the unit n-sphere by S^n. Show that $S^n \times \mathbb{R}$ is parallelizable (i.e., its tangent bundle is isomorphic, as a vector bundle, to the product $(S^n \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$).

4) Let M be a smooth (infinitely differentiable) manifold and denote by $\mathcal{F}_M$ the vector space of smooth functions from M to $\mathbb{R}$. An $\mathbb{R}$-linear map $\delta : \mathcal{F}_M \rightarrow \mathcal{F}_M$ is a **derivation** if it satisfies:

$$\forall\, f, g \in \mathcal{F}_M : \ \delta(f, g) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g)$$

a) Show that $(\delta(f))(x)$ depends only on the values of f in an arbitrarily small neighborhood of x.

b) Let δ be a given derivation for M and suppose N is an open submanifold of M. Show that there is a unique derivation $\bar{\delta}$ for N with the property that if $f \in \mathcal{F}_{M}$, then:

$$\bar{\delta}(f|_{N}) = \delta(f)|_{N}$$

5) Let P be a hyperplane in $\mathbb{R}^n$ (i.e., an affine subspace of dimension $(n-1)$). We denote by P_j the coordinate hyperplane obtained by deleting x_j. We endow P and P_j with the volume elements induced from the standard Riemannian metric on $\mathbb{R}^n$. Let M be an $(n-1)$-dimensional compact submanifold with boundary in P and denote its orthogonal projection on P_j by M_j. If V and V_j denote, respectively, the $(n-1)$-dimensional volumes of M and M_j, show that:

$$V^2 = V_1^2 + \cdots + V_n^2$$

6) We define vectorfields A and B on $\mathbb{R}^3$ by:

$$A = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad B = (y+1)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

a) Is there a smooth change of coordinate $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ so that $A = h_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ and $B = h_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$?

b) Is there a surface (two dimensional submanifold) of $\mathbb{R}^3$ tangent to both A and B?