بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۶/۲/۱۷

موضوع امتحان: **هندسه**

۱) ثابت کنید تصویر یک فضای توپولوژیک فشردهٔ موضعاً همبند تحت نگاشت پیوسته، موضعاً همبند است.
یادآوری: فضای X را **موضعاً همبند** می‌نامیم در صورتی که برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U از x، همسایگی همبند (نه لزوماً باز) V از x وجود داشته باشد که $V \subset U$.

۲) کلیهٔ ژئودزیکهای روی سطح یک کره دو بُعدی در $\mathbb{R}^3$ (با متریک القایی از $\mathbb{R}^3$) را مشخص کنید.

۳) روی $\mathbb{R}^{2n}$، ۱ـفرم $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i dx_{n+i}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید

$$\underbrace{d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha}_{n \text{ بار}}$$

یک عنصر حجم برای $\mathbb{R}^{2n}$ است. اگر به‌جای $\mathbb{R}^{2n}$، یک خمینهٔ فشرده جهتپذیر M در نظر بگیریم، آیا می‌توان یک ۱ـفرم α روی M یافت که $d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha$ (n بار) یک عنصر حجم برای M باشد؟

۴) فرض کنید M یک خمینهٔ هموار فشرده و جهتپذیر است با لبهٔ ∂M. اگر $f : M \to \partial M$ یک نگاشت هموار باشد، نشان دهید تحدید f به ∂M نمی‌تواند یک وابرریختی (دیفئومرفیسم) باشد.

۵) فرض کنید S یک رویه (خمینهٔ دو بعدی) فشرده جهتدار و بدون مرز باشد و X یک میدان برداری هموار روی M. نشان دهید اگر X دارای یک خم انتگرال بستهٔ (غیرثابت) باشد، آنگاه دیورژانس X در دست کم یک نقطه صفر می‌شود.

۶) U یک مجموعهٔ باز ناتهی در $\mathbb{R}^n$ است و $f : U \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت هموار که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) f سره است (یعنی تصویر وارون هر مجموعهٔ فشرده تحت f، فشرده است).

ب) در خارج یک زیر مجموعهٔ فشرده از U، $\det(df_x)$ تغییر علامت نمی‌دهد و ثابت صفر نیست.

نشان دهید f پوشا است.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Geometry

1) Show that the continuous image of a compact locally connected topological space is locally-connected. Recall: A space X is **locally-connected** if for every $x \in X$ and any neighborhood U of x, there exists a (not necessarily open) neighborhood V of x, $V \subset U$, which is connected.

2) Determine all the geodesics on the surface of a sphere in $\mathbb{R}^3$ (with the induced metric from $\mathbb{R}^3$).

3) Consider the one-form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i dx_{n+i}$ on $\mathbb{R}^{2n}$. Show that

$$\underbrace{d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha}_{n \text{ times}}$$

is a volume element for $\mathbb{R}^{2n}$. If we replace $\mathbb{R}^{2n}$ by a compact oriented 2n-manifold M, is it possible that for a one-form α on M, $d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha$ (n times) is a volume element for M?

4) Let M be a smooth, compact, orientable manifold with boundary ∂M, and let $f : M \to \partial M$ be smooth. Show that the restriction of f to ∂M cannot be a diffeomorphism.

5) Let S be a smooth, compact, orientable two-manifold without boundary and X a smooth tangent vector field on S. If f possesses a non-constant closed integral curve, show that the divergence of X vanishes somewhere on S.

6) Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be non-empty open and $f : U \to \mathbb{R}^n$ satisfy be following:

a) f is proper, i.e., the inverse image under f of any compact set, is compact.

b) Outside some compact subset of U, $\det(df_x)$ is not identically zero and does not change sign.

Show that f is surjective (onto).