

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۸/۲/۹

موضوع امتحان: هندسه

۱- مثالهایی بزنید که

(i) فضا هاوسدورف ولی فضای خارج قسمتی هاوسدورف نباشد.

(ii) نگاشت خارج قسمتی باز نباشد.

(iii) فضا FC ولی فضای خارج قسمتی FC نباشد.(فضای توپولوژیکی را FC گویند هرگاه که در هر نقطه دارای پایه شمارا از بازها باشد.)۲- برای چنبره $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u) \quad (0 < b < a)$$

انحنای گائوسی و خطوط انحناء را به دست آورید. همچنین نقاطی را که دارای 0 ، 1 و 2 امتداد مجانبی هستند مشخص نمایید.

۳- نشان دهید نگاشت پیوسته $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ با ضابطه $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ یک نشاننده از $\mathbb{R}P(2)$ به \mathbb{R}^4 القاء می‌کند.
($\mathbb{R}P(2)$ فضای افکنشی حقیقی دوبعدی است.)

۴- نشان دهید مجموعه زیرفضاهای خطی دوبعدی در \mathbb{R}^4 را می‌توان به یک خمینه هموار تبدیل کرد.

۵- M را یک خمینه فشرده، جهت‌پذیر، بدون لبه و هموار در نظر بگیرید. فرض کنید α یک k -فرم روی M باشد. ثابت کنید فرم دیفرانسیل بسته β روی M وجود ندارد که $d\alpha \wedge \beta$ یک عنصر حجم برای M باشد.

۶- X و Y را دو میدان برداری هموار در همسایگی مبدأ در \mathbb{R}^2 که در مبدأ مستقل خطی هستند در نظر بگیرید. نشان دهید و ابربرخی f از یک همسایگی مبدأ در \mathbb{R}^2 به همسایگی مبدأ در \mathbb{R}^2 وجود دارد که $X \circ f = a \frac{\partial f}{\partial x}$ و $Y \circ f = b \frac{\partial f}{\partial y}$ که a, b تابعهای هموار هستند.

Geometry

1) Give examples of:

- i) A Hausdorff space with non-Hausdorff quotient space.
- ii) A non-open quotient map.
- iii) A first countable space with non-first-countable quotient space.

2) For the torus: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u) \quad (0 < b < a)$$

compute the Gaussian curvature and the lines of curvature. Describe the points with 0, 1, and 2 asymptotic directions.

3) Show that the map $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ by

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

induces an imbedding of $\mathbb{R}P(2)$ into \mathbb{R}^4 . ($\mathbb{R}P(2)$ is the real projective plane.)

- 4) Show that the set of two-dimensional linear subspaces of \mathbb{R}^4 can be equipped with a smooth manifold structure.
- 5) Let M be a compact, smooth, orientable manifold without boundary and α a k -form on M . Show that there does not exist a closed form β so that $d\alpha \wedge \beta$ is a volume element for M .
- 6) Let X and Y be two smooth vectorfields defined in a neighborhood of 0 in \mathbb{R}^2 and linearly independent at 0. Show that there exists a diffeomorphism f in a neighborhood of 0 such that $X \circ f = a \frac{\partial f}{\partial x}$ and $Y \circ f = b \frac{\partial f}{\partial y}$ with a and b smooth functions.