

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۱,۳,۲

موضوع امتحان: هندسه-توپولوژی

از ده سؤال داده شده شش سؤال به میل خود انتخاب کرده پاسخ دهید. شماره سؤالهای انتخاب شده را روی برگه امتحانی به روشنی بنویسید. اگر شماره سؤالهای انتخاب شده ذکر نشده باشد فقط به شش پاسخ اول نمره داده می شود.

۱- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و A یک زیرمجموعه ناتهی از X باشد. فرض کنید $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت با خاصیت زیر باشد:

$$\exists M > 0, \quad |f(x) - f(y)| \leq M.d(x, y)$$

برای هر $x, y \in A$ ثابت کنید یک نگاشت $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که تحدید آن به A همان f است و به علاوه برای هر $x, y \in X$ داریم:

$$|g(x) - g(y)| \leq M.d(x, y)$$

۲- ثابت کنید هیچ رویه مینیمال فشرده در \mathbb{R}^3 وجود ندارد.

۳- n -ساده متعارف Δ_n در \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 1$, به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

گروه بنیادی (به پایه دلخواه) اسکلت یک بعدی Δ_n را محاسبه کنید.

۴- فرض کنید M یک خمینه هموار است (بی لبه و همبند) و \sim یک رابطه هم‌ارزی روی M به قسمی که $M' = M/\sim$ ساختار یک خمینه هموار دارد که برای آن نگاشت افکنش $\pi : M \rightarrow M'$ یک استغراق است. ثابت کنید برای هر میدان برداری هموار X' بر M' , یک میدان برداری هموار X بر M وجود دارد به قسمی که $T\pi \circ X = X' \circ \pi$.

۵- مکمل مجموعه

$$\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

در \mathbb{R}^3 را به M نمایش می دهیم. گروههای همولوژی M را محاسبه کنید.

- ۶- فرض کنید M خمینه‌ای هموار است (بی‌لبه و همبند) از بعد n ، به طوری که n میدان برداری هموار مستقل خطی (روی M) مانند X_1, \dots, X_n موجودند. فرض کنید $g : M \rightarrow M$ یک وابریختی هموار است به طوری که $g_* X_k = X_k$ برای $1 \leq k \leq n$. ثابت کنید اگر g دارای یک نقطه ثابت باشد، g نگاشت همانی است.
- ۷- در دیسک بسته واحد در \mathbb{R}^2 ، n وتر رسم کرده‌ایم به طوری که اشتراک هیچ دو وتر روی مرز دیسک قرار ندارد و هیچ سه وتر از یک نقطه داخل دیسک نمی‌گذرند. اگر تعداد نقاط تقاطع وترها در داخل دیسک برابر m باشد، تعداد ناحیه‌های پدید آمده توسط وترها در دیسک را بر حسب m و n محاسبه کنید.
- ۸- X و Y دو میدان برداری هموار در \mathbb{R}^n هستند که دیورژانس هر یک نسبت به عنصر حجم متداول \mathbb{R}^n تابعی ثابت است. اگر S یک کره به شعاع و مرکز دلخواه در \mathbb{R}^n باشد، نشان دهید $[X, Y]$ در حداقل یک نقطه بر S مماس است.
- ۹- فرض کنید K یک مجتمع ساده‌ی منتهای است و $|K|$ فضای توپولوژیک وابسته به آن می‌باشد. فرض کنید $f : |K| \rightarrow |K|$ یک همسانریختی است و $g : |K| \rightarrow |K|$ یک نگاشت پیوسته است که هم‌توپ با یک نگاشت ثابت می‌باشد. نشان دهید نقطه $x \in |K|$ وجود دارد به قسمی که $f(x) = g(x)$.
- ۱۰- فرض کنید Γ گروهی است منتهای از وابریختی‌های یک خمینه هموار X (بی‌لبه و همبند). به علاوه فرض کنید $Y = X/\Gamma$ خمینه‌ای هموار است به طوری که نگاشت افکنش $\pi : X \rightarrow Y$ یک فضای پوششی تعریف می‌کند. نشان دهید که نگاشتهای القایی $H^k(\pi) : H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$ روی فضاهای کوهمولوژی دورام یک‌به‌یک هستند.

Geometry - Topology

Answer six questions from the following ten. Write the number of questions chosen on the cover of answer book; otherwise only the first six answers will be graded.

- 1) Let (X, d) be a metric space and A be a (non-empty) subset of X . Let $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ be a function such that

$$\exists M > 0 \quad , \quad |f(x) - f(y)| \leq M \cdot d(x, y)$$

for all $x, y \in A$. Show that there is a function $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ such that the restriction of g on A is f , and

$$|g(x) - g(y)| \leq M \cdot d(x, y)$$

for all $x, y \in X$.

- 2) Show there is no compact minimal surface in \mathbb{R}^3 .
- 3) Let Δ_n denote the standard n -simplex in \mathbb{R}^{n+1} , i.e.

$$\Delta_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

Compute the fundamental group (with arbitrary base point) of the 1-skeleton of Δ_n .

- 4) Let M be a smooth manifold (without boundary and connected), let \sim be an equivalence relation on M such that $M' := M / \sim$ is a smooth manifold and the canonical projection $\pi : M \rightarrow M'$ is a submersion. Show that for any smooth vector field X' on M' , there exists a smooth vector field X on M such that

$$T\pi \circ X = X' \circ \pi$$

- 5) Denote the complement of

$$\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

in \mathbb{R}^3 by M . Find the homology groups of M .

- 6) Let M be a smooth (without boundary and connected) manifold with dimension n such that there exist n (smooth) vector fields X_1, \dots, X_n on M which are linearly independent (on M). Let $g : M \rightarrow M$ be a smooth diffeomorphism such that $g_* X_k = X_k$, for $1 \leq k \leq n$. Show that if g has a fixed point, then g is the identity map.

- 7) n chords are drawn in the closed unit disk in such a way that no two intersect on the boundary of the disk and no three chords are concurrent within the disk. If m is the number of intersections of the chords inside the disk, compute the number of regions into which the chords divide the disk in terms of m and n .
- 8) Let X and Y be smooth vectorfields on \mathbb{R}^n such that the divergence of each, relative to the standard volume element in \mathbb{R}^n , is a constant function. If S is sphere of a arbitrary radius and center in \mathbb{R}^n , show that $[X, Y]$ is tangent to S at some point of S .
- 9) Let K be a finite simplicial complex and let $|K|$ denote the associated topological space. Suppose that $f : |K| \rightarrow |K|$ be a homeomorphism and $g : |K| \rightarrow |K|$ is a continuous map which is homotopic to a constant map. Show that there exists $x \in |K|$ such that $f(x) = g(x)$.
- 10) Let Γ be a finite group of diffeomorphisms of smooth (without boundary and connected) manifold X . Moreover, let $Y = X/\Gamma$ be a smooth manifold such that the canonical projection mapping $\pi : X \rightarrow Y$ defines a covering space. Show that the induced mappings $H^k(\pi) : H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$, on de Rham cohomology spaces, are injective.