بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۱/۳/۲

موضوع امتحان: منطق

(۱۰ نمره) ۱ـ فرض کنید T_1 و T_2 دو نظریه در منطق گزاره‌ها باشند. فرض کنید مجموعهٔ مدل‌های T_2 مکمل مجموعهٔ مدلهای T_1 باشد. نشان دهید هر دو نظریه T_1 و T_2 متناهیاً اصل‌پذیرند.

(۵ نمره) ۲ـ فرض کنید در محلی هستید که افراد آنجا همیشه راست می‌گویند یا همیشه دروغ می‌گویند. شما به دو راهی رسیدید و می‌خواهید بدانید کدام راه به پایتخت می‌رسد. یک فرد محلی در آنجاست که فقط به یک سؤال به‌صورت آری یا نه جواب می‌دهد. چه سؤالی بکنید تا بفهمید که کدام راه به پایتخت می‌رسد؟

(۱۰ نمره) ۳ـ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو ساختار برای زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ باشند و $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. فرض کنید هر عضو جهان $\mathcal{A}$، یک ثابت باشد. ثابت کنید $\mathcal{A}$ به‌طور یکنواخت در $\mathcal{B}$ قابل نشاندن است.

(۱۵ نمره) ۴ـ فرض کنید $\mathcal{L} = \{<, S\}$ زبانی مرتبه اول با تساوی باشد و T نظریه‌ای با اصول زیر باشد:

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \land y < z \to x < z)$$
$$\forall x \forall y (x < y \land y < x \to x = y)$$
$$\forall x \neg (x < x)$$
$$\forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)$$
$$\forall x \exists y (x = S(y))$$
$$\forall x \exists y (y = S(x))$$
$$y = S(x) \leftrightarrow x < y \land \neg \exists z (x < z \land z < y)$$

آیا نظریه T کامل است؟ چرا؟

(۱۰ نمره) ۵ـ ثابت کنید مجموعه همه توابع پیوسته $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دارای عدد اصلی $2^{\aleph_0}$ است.

(۱۰ نمره) ۶ـ ثابت کنید $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$

Logic

1) Let T_1 and T_2 be two theories in propositional logic. Suppose the set of all models of T_2 is the complement of the set of all models of T_1. Show that T_1 and T_2 are both finitely axiomatizable.

2) You are in a land inhabited by people who either always tell the truth or always tell falsehoods. You come to a fork in the road and you need to know which fork leads to capital. There is a local resident there, but has time only to reply to one yes-or-no question. What one question should you ask so as to learn which fork to take?

3) Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be two structures for a first order language $\mathcal{L}$. Suppose $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ and every element of the universe of $\mathcal{A}$ is a constant. Show that $\mathcal{A}$ can be isomorphically embedded in $\mathcal{B}$.

4) Let $\mathcal{L} = \{<, S\}$ be a first order language with equality. Let T be a theory with the following axioms:

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \land y < z \to x < z)$$
$$\forall x \forall y (x < y \land y < x \to x = y)$$
$$\forall x \neg (x < x)$$
$$\forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)$$
$$\forall x \exists y (x = S(y))$$
$$\forall x \exists y (y = S(x))$$
$$y = S(x) \leftrightarrow x < y \land \neg \exists z (x < z \land z < y)$$

Is T a complete theory? Why?

5) Prove that the set of all continuous functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has cardinality $2^{\aleph_0}$.

6) Prove that $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.