بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۷۷٫۳٫۱**

موضوع امتحان: **هندسه**

۱ـ فرض کنید $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته بین فضاهای متریک و $q \in Y$ نقطه‌ای که $\varphi^{-1}(q) \subset X$ فشرده باشد. در این صورت همسایگی‌های U حول $\varphi^{-1}(q)$ در X و V حول q در Y وجود دارد طوری‌که $\varphi_{|_U} : U \longrightarrow V$ یک نگاشت سره است.
(نگاشت f را سره گویند اگر تصویر معکوس هر زیرمجموعه فشرده تحت f، فشرده باشد).

۲ـ خم هموار $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را با شرایط زیر پیدا کنید.
$\kappa(t) \equiv 1, \tau(t) \equiv 1$ و $\gamma(0) = \vec{T}(0) = e_1$، $\vec{N}(0) = e_2, \vec{B}(0) = e_3$.
که در آن، κ و τ به‌ترتیب انحناء و تاب و $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ کنج فرنه می‌باشد.

۳ـ نشان دهید فضای $\mathbb{R}P^n$ جهت‌پذیر است اگر n فرد باشد و جهت‌ناپذیر است اگر n زوج باشد.

۴ـ نشان دهید هیچ غوطه‌ورسازی از S^n به توی $\mathbb{R}^n$ وجود ندارد.

۵ـ M را یک خمینهٔ هموار بی‌لبه و $K \subset M$ را یک زیرمجموعهٔ بستهٔ آن در نظر بگیرید. نشان دهید هر همسایگی K در M شامل یک همسایگی بسته از K است که یک زیرخمینه هموار لبه‌دار در M می‌باشد.

۶ـ $U \subset \mathbb{R}^m$ را یک زیرمجموعه باز و $W \subset U$ را زیرمجموعه باز می‌گیریم طوری‌که بستار آن فشرده باشد و $\overline{W} \subset U$. فرض کنید $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت یک به یک، C^1 و غوطه‌ورسازی روی U باشد. عدد $\epsilon > 0$ وجود دارد طوری‌که برای هر نگاشت C^1، $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ که

$$\|g(x) - f(x)\| < \epsilon$$

$$\|Dg(x) - Df(x)\| < \epsilon$$

برای هر $x \in U$، داریم $g_{|_W}$ یک‌به‌یک و غوطه‌ورسازی است.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Manifolds

1. Let $\varphi : X \longrightarrow Y$ be a continuous map of metric spaces and assume that there is a point $q \in Y$ such that $\varphi^{-1}(q) \subset X$ is compact. Show that there exist open neighborhoods U of $\varphi^{-1}(q)$ in X and V of q in Y such that $\varphi_{|_U} : U \longrightarrow V$ is proper. (A map f is proper if the inverse image of every compact set under f is compact).

2. Find a smooth curve $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ for which $\kappa(t) \equiv 1$ and $\tau(t) \equiv 1$ and $\gamma(0) = \vec{T}(0) = e_1$, $\vec{N}(0) = e_2$ and $\vec{B}(0) = e_3$. Here κ and τ are, respectively, curvature and torsion, and $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ is the Frenet frame.

3. Show that $\mathbb{R}P^n$ is orientable if n is odd, and nonorientable if n is even.

4. Show that there is no immersion of S^n into $\mathbb{R}^n$.

5. Let M be a smooth manifold without boundary and $K \subset M$ a closed set. Show that every neighborhood $U \subset M$ of K contains a closed neighborhood of K which is a smooth submanifold of M (with boundary).

6. Let $U \subset \mathbb{R}^m$ be an open set and $W \subset U$ an open set with compact closure $\overline{W} \subset U$. Let $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ be an one to one C^1 immersion on U. There exist $\epsilon > 0$ such that if $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ is C^1 and

$$\|g(x) - f(x)\| < \epsilon$$

$$\|Dg(x) - Df(x)\| < \epsilon$$

for all $x \in U$, then $g_{|_W}$ is an one to one C^1 immersion.