

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۹،۳،۲۶

موضوع امتحان: آنالیز عددی

۱- ریشه معادله زیر را تا ۷ رقم اعشاری به دست آورید

$$\sin x - \frac{x+1}{x-1} = 0$$

مقدار تقریبی این ریشه ۰٫۴- است.

۲- با استفاده از مقادیر تابع $y = \log_{10} x$ که در جدول زیر داده شده

x	20	25	30
y	1.3010	1.3970	1.4771

مقدار x را به دست آورید به طوری که $y = \log_{10} x = 1/35$.

۳- با استفاده از پارتیشن کردن ماتریس‌ها معکوس ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

۴- با استفاده از فرمول گوس سه نقطه‌ای ($n = 3$) انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x^3} dx$$

۵- فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ ، $0 < a < b < 1$ ، پیوسته است. نشان دهید می‌توان یک دنباله از کثیرالجمله‌های $P_n(x)$ که ضرایب آن اعداد صحیح هستند به دست آورد به طوری که $P_n(x)$ به طور یکنواخت به $f(x)$ در $[a, b]$ همگرا باشد.

۶- اگر $X_m = \{-1, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, 1\}$ ، بهترین تقریب درجه سوم گسسته را برای $f(x) = |x|$ به دست آورید.

۷- نشان دهید بهترین تقریب خطی به تابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ در $[0, 1]$ به صورت زیر داده می‌شود.

$$\frac{2c+1}{2} + (\sqrt{2}-1)x, \quad c = \left[\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right]^{1/2}$$

۸- نشان دهید چنانچه تابع f که در I تعریف شده، شرط دینی-لیپشیتز

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) \log \delta = 0$$

را بپذیرد، آنگاه interpolation لاگرانژ $L_n(f; I)$ به طور یکنواخت به f در I همگراست.

۹- اگر داشته باشیم

$$\tilde{u}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(n+2)\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta$$

نشان دهید برای کثیرالجمله $p(x)$ از درجه کمتر و یا مساوی n

$$\int_{-1}^1 [\text{sign} \tilde{u}_{n+1}(x)] p(x) dx = 0$$

۱۰- یک interpolation گویا وسیله توابع گویا $R(2, 2)$ برای تابع $|x|$ در نقاط $\{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ به دست آورید.

Numerical Analysis

- 1) Find the root of the equation

$$\sin x - \frac{x+1}{x-1} = 0$$

to seven significant digits. The approximate value of the root is 0.4

- 2) Using the values of the function $y = \log_{10} x$, given in the following table

x	20	25	30
y	1.3010	1.3970	1.4771

find the value of x such that $y = \log_{10} x = 1.35$

- 3) Use partitioned matrices to find the inverse of the following matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- 4) Using Gaussian formula with three points ($n = 3$) to evaluate the integral

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x^3} dx$$

- 5) Given the function $f(x)$ which is continuous in an interval $[a, b]$, $0 < a < b < 1$, show that it is possible to find a sequence of polynomials $P_n(x)$, with integral coefficients, such that $P_n(x)$ converges uniformly to $f(x)$ in $[a, b]$.

- 6) Let $x_m = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$, find the best approximation of third degree to $f(x) = |x|$.

- 7) Show the best linear approximation to $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ on $[0, 1]$ is

$$\frac{2c+1}{2} + (\sqrt{2}-1)x \quad , \quad c = \left[\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right]^{1/2}$$

- 8) Show if f defined in I , satisfies (Dini-Lipschitz condition)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) \log \delta = 0$$

then the Lagrangian interpolation $L_n(f; I)$ converges uniformly to f on I .

9) If

$$\tilde{u}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta$$

show for polynomial $p(x)$ of degree $\leq n$

$$\int_{-1}^1 [\text{sign}\tilde{u}_{n+1}(x)]p(x)dx = 0$$

10) Find the rational interpolation of $|x|$ at $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ by a rational function $R(2, 2)$.