بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۰٫۴٫۷**

موضوع امتحان: **آنالیز عددی**

۱ـ ثابت کنید کثیرالجمله متعامد $p_n(x)$ لژاندر دارای n ریشه متمایز در فاصله $[-1,1]$ است (راهنمایی: $p_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$).

۲ـ الف) هرگاه $f(x)$ پیوسته و $g(x)$ پیوسته تناوبی با دوره تناوب b باشد، مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(x)g(nx)dx$$

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{1+3\sin^2 nx}dx$$

۳ـ مطلوبست محاسبه بهترین تقریب تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ در فاصله $[0,1]$ با نرم $\|.\|=\sup|.|$ و $\|.\|=\int_0^1|f^2|dx$.

۴ـ الف) اگر $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ و $|f(x)|\leq 1$ و برای هر x_j به‌طوری که $0\leq x_1\leq\ldots\leq x_j\leq\ldots\leq x_n=2\pi$ داشته باشیم $f(x_j)=\pm 1$، آنگاه مقدار ثابت $c>0$ موجود است که $(1-x^2)f'^2(x)=c(1-f^2(x))$.

ب) تابع $f(x)$ در (الف) را محاسبه کنید.

۵ـ ثابت کنید اگر $\tilde{P}_n(x)$ بهترین تقریب با نرم L_1 برای تابع $f(x)=x^{n+1}$ در فاصله $[0,1]$ باشد، آنگاه

$$x^{n+1}-\tilde{P}_n(x)=\tilde{U}_{n+1}(x)$$

که در آن $\tilde{U}_{n+1}(x)$ کثیرالجمله نوع دوم چبیشف نرمالیزه شده است.

۶ـ ثابت کنید برای معادله زیر:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

روش تفاضل محدود کرانک نیکلسون پایدار است.

۷ـ از روش جردن مطلوبست محاسبه مقادیر خاص و بردارهای خاص ماتریس زیر:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

۸ـ بررسی همگرایی تکرار نقطه ثابت $x^{(k+۱)} = g(x^{(k)})$ مورد نظر است. فرض کنید $x^{(۰)}$ داده شده است و به‌ازای یک نرم برداری $\|.\|$، $\epsilon > ۰$ و σ، $۰ < \sigma < ۱$، وجود دارند به‌طوری که

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \sigma \|x - y\| \qquad \forall x, y \in \overline{N_\epsilon(x^{۰})}.$$

فرض کنید $x^{(۱)} = g(x^{(۰)})$ در رابطهٔ $\|x^{(۱)} - x^{(۰)}\| \leq (۱ - \sigma)\epsilon$ صدق می‌کند. ثابت کنید:

الف) $x^{(k)} \in N_\epsilon(x^{(۰)})$ برای همه k، و

ب) g دارای تنها یک نقطه ثابت $x^{(*)}$ در $\overline{N_\epsilon(x^{(۰)})}$ است و

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(*)}.$$

Numerical Analysis

1) Prove that the Legander's polynomial P_n possesses n different roots in $[-1,1]$. (Hints: $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$)

2) a) If $f(x)$ is continuous and $g(x)$ is continuous and periodic with period b, evaluate the following limit:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(x)g(nx)\,dx$$

b) Evaluate the following integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{1+3\sin^2 nx}\,dx$$

3) Find the best approximation for $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $[0,1]$ with the following norms:

$$\|.\| = \int_0^1 |f^2|\,dx, \qquad \|.\| = \sup|.|$$

4) If $f(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ and $|f(x)| \le 1$ and for x_j such that $0 \le x_1 \le \ldots \le x_j \le \ldots \le x_n = 2\pi$ we have $f(x_j) = \pm 1$ then

a) show that there exists constant $c > 0$ such that

$$(1-x^2)f'^2(x) = c(1-f^2(x))$$

b) find $f(x)$ in a)

5) Prove that if $\tilde{P}_n(x)$ is the best approximation with L_1 norm for the function $f(x) = x^{n+1}$ in $[0,1]$, then

$$x^{n+1} - \tilde{P}_n(x) = \tilde{U}_{n+1}(x)$$

where $\tilde{U}_{n+1}(x)$ si the second Chebeshev normalized polynomial

6) Prove that the following heat equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

with Crank-Niclson finite difference method is stable

7) Apply Jordan method to find the eigenvalues and eigenvectors for the followin matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8) This problem is concerned with convergence of fixed point iteration $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$. Assume $x^{(0)}$ is given and for a given vector norm, $\|.\|$, these exist $\epsilon > 0$ and σ, $0 < \sigma < 1$, so that

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \sigma \|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{N_\epsilon(x^0)}.$$

Suppose $x^{(1)} = g(x^{(0)})$ satisfies $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq (1 - \sigma)\epsilon$. Prove:

a) $x^{(k)} \in N_\epsilon(x^{(0)})$ for all k, and

b) g has a unique **fixed point** $x^{(*)}$ and $\overline{N_\epsilon(x^{(0)})}$ and

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(*)}.$$