

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۱،۳،۳

موضوع امتحان: آنالیز عددی

۱- الف) نشان دهید که حل مسأله

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2 \quad (۱)$$

که در آن $A, m \times n, m < n$ ، معادل است با حل مسأله

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^T & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ o \end{pmatrix} \quad (۲)$$

ب) تحت چه شرایطی جواب مسأله (۱) یگانه است؟ چرا؟

پ) نشان دهید در حالتی که جواب مسأله (۱) یگانه است، چگونه می‌توان مسأله (۱) را با استفاده از تجزیه چولسکی (برای ماتریسهای متقارن و معین مثبت) حل کرد.

ت) مسأله (۱) را با استفاده از تجزیه قائم QR حل کنید.

۲- الف) روش نیوتون را می‌توان برای پیدا کردن وارون یک عدد به‌کار برد. معادله

$$f(x) = a - \frac{1}{x}$$

را در نظر بگیرید. تکرارهای روش نیوتون را برای پیدا کردن ریشه $f(x)$ ، یعنی $x = \frac{1}{a}$ ، به‌دست آورید.

ب) با استفاده از تعریف نرخ همگرایی مجانبی، نشان دهید که دنباله حاصل از روش نیوتون دارای همگرایی مجانبی درجه دوم است.

پ) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ وارونپذیر است. نشان دهید چگونه روش نیوتون را می‌توان برای تخمین وارون ماتریس A به‌کار برد؟ با فرض وجود شرایط مناسب برای نرم ماتریسی مورد استفاده نشان دهید که روش نیوتون برای محاسبه وارون ماتریس A دارای همگرایی مجانبی درجه دوم است.

۳- بهترین تقریب خطی در نرم چبیشف برای تابع زیر را به‌دست آورید:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in [0, 1]$$

۴- رشته فوریه-چبیشف را برای تابع $f(x) = |x|$ در بازه $[-1, 1]$ بنویسید.

۵- برای معادله دیفرانسیل داده شده با شرایط مرزی

$$y'' + xy' + y = 2x$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

جواب تقریبی را از روش اجزاء محدود (اسپلاین خطی) به دست آورید ($h = 0.25$) و حداکثر خطا را محاسبه کنید.

۶- با استفاده از روش گوس سه نقطه‌ای انتگرال $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ را محاسبه کنید و حداکثر خطا را به دست آورید.

Numerical Analysis

- 1) a) Show that solving the least squares problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2 \quad (1)$$

is equivalent to solving

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^T & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ o \end{pmatrix} \quad (2)$$

- b) State conditions under which the solution to (1) is unique. Why?
c) For the case that (1) has a unique solution, show how the problem (1) can be solved using the Cholesky factorization of a positive definite matrix.
d) Solve problem (1) using the QR factorization.
- 2) a) Newton's method can be used for computing the inverse of a number. Consider the equation

$$f(x) = a - \frac{1}{x}$$

Develop Newton's method for finding the zero of $f(x)$, i.e., $x = \frac{1}{a}$.

- b) Using the definition of asymptotic rate of convergence, show that the algorithm is quadratically convergent.
c) Assume A is an invertible $n \times n$ matrix. Show how to use Newton's method to estimate the inverse of A ? Assuming the existence of suitable conditions for the matrix norm being used, show that the algorithm is quadratically convergent.
- 3) Determine the best linear approximation in Chebyshev norm for the function

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{on } [0, 1]$$

- 4) Write the Fourier-Chebyshev series for the function

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$$

- 5) Given the boundary value problem

$$\begin{aligned} y'' + xy' + y &= 2x \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

Find an approximate solution using finite element (linear spline) and estimate the maximum error ($h = 0.25$).

6) Use the three-point Gauss method to evaluate

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$$

and give an estimate of the maximum error.