بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۵/۲/۹

موضوع امتحان: **آنالیز عددی پیشرفته**

۱ـ یک دستگاه نقطه شناور حقیقی را در نظر بگیرید، که در آن روند عدد یک (دقت ماشین) را با ϵ نشان می‌دهیم و فرض کنید که c_i، $i = ۱, \ldots, N$، N عدد قابل نمایش در ماشین هستند. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

$$s = c_۱;$$
$$\text{for } i = ۲ \text{ to } N$$
$$s = s + c_i;$$

s_N را جمع دقیق c_iها و $\hat{s}_N$ را جمع محاسبه شده c_iها توسط ماشین با الگوریتم فوق در نظر بگیرید. فرض کنید که جمع این اعداد موجب بروز پدیده سرریز نمی‌شود.

الف) نشان دهید که $\hat{s}_N$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{s}_N = \sum_{j=۱}^{N} c_j(۱ + a_j)^{N+۱-j}, \ |a_j| < \epsilon$$

(در واقع، جمله اول را می‌توان به $c_۱(۱ + a_۱)^{N-۱}$ تقلیل داد، اما لزومی ندارد.)

ب) نشان دهید که اگر $N\epsilon < ۰/۱$، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\hat{s}_N = \sum_{j=۱}^{N} c_j\Big(۱ + (N + ۱ - j)b_j\Big), |b_j| < ۱/۰۶\epsilon$$

پ) نشان دهید که اگر $N\epsilon < ۰/۱$، آنگاه

$$|s_N - \hat{s}_N|/s_N \leq \Big[(\sum_{j=۱}^{N} c_j(N + ۱ - j))/(\sum_{j=۱}^{N} c_j)\Big]\, ۱/۰۶\epsilon$$

ت) این ادعا را که «محاسبه حاصل‌جمع N عدد مثبت با این الگوریتم ساده یک فرآیند پایدار است»، با استدلال تأیید کنید.

ث) با استفاده از تخمین به‌دست آمده در (پ) ادعای زیر را با استدلال تأیید کنید:
«در جمع اعداد، مرتب کردن آنها در اندازه‌های افزایشی، در مقایسه با هر ترتیب دیگر، موجب تقلیل خطای روند (گرد) کردن می‌شود.»

۲ـ ثابت کنید در انتگرال‌گیری عددی

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{8}\Big[f(a)+3f(\frac{2a+b}{3})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)\Big],$$

خطا از مرتبهٔ $(b-a)^5$ است. به‌عبارت دیگر اگر طرف راست را با $I(f;a,b)$ نشان دهیم وجود دارد ثابت c وابسته به f به‌طوری‌که

$$|\int_a^b f(x)dx - I(f;a,b)| \leq c(b-a)^5.$$

(فرض می‌کنیم که f دارای مشتق چهارم پیوسته روی بازه (a,b) است.)

۳ـ برای تابع $f(x)=|x|$ در فاصله $[-1,1]$ و نقاط $x_0=-1, x_1=-\frac{1}{2}, x_2=0, x_3=\frac{1}{2}, x_4=1$ یک کثیرالجمله بهترین تقریب از درجه دوم به‌دست آورید. (از نرم چبی شف، $\|f\|=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|$، در تعیین بهترین تقریب استفاده کنید).

۴ـ تابع اسپلاین طبیعی درجه ۳، $S(x)$، برای درونیابی داده زیر مورد نظر است:

x_i	-1	0	2	3
f_i	$\frac{1}{2}$	0	1	f_3

که در آن مقدار f_3 را باید تعیین کنید. تعریف زیر برای $S(x)$ در نظر گرفته شده است:

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=\frac{x^2}{4}(3+x) & -1\leq x<0 \\ S_1(x)=\frac{x^2}{4}(3-x) & 0\leq x<2 \\ S_2(x)=ax^3+bx^2+cx+d & 2\leq x<3 \end{cases}$$

الف) نشان دهید که S_0 و S_1 توابع مناسب اسپلاین برای $S(x)$، اسپلاین طبیعی درجه ۳، در فواصل ذکر شده مربوطه برای داده ارائه شده در بالا می‌باشد.

ب) با تکمیل تعریف $S(x)$ برای داده ارائه شده روابطی را مشخص کنید که از حل آنها مقادیر a، b، c، d و f_3 تعیین می‌شوند (نیازی به حل این روابط و تعیین مقادیر پارامترها نیست).

۵ـ ثابت کنید که روش نیوتن در حل مسئله زیر با هر نقطه آغازی پس از یک قدم به جواب سراسری مسئله می‌رسد:

$$\min_{x \in R^n} \Big(\frac{1}{2} x^T A x + x^T g + b\Big),$$

که در آن $b, g \in R^n$ و $A \in R^{n\times n}$، ماتریس معین مثبت، همگی داده شده‌اند.

۶ـ فرمول زیر را برای $D_0(h)$ در نظر بگیرید:

$$D_0(h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

الف) نشان دهید که $D_0(h)$ را می‌توان تخمینی برای $f''(x)$ (مشتق دوم f در x) با خطای برشی از مرتبه h^2 گرفت.

ب) با استفاده از مقادیر $D_0(\frac{1}{2}h)$ و $D_0(h)$ فرمول دیگری به‌دست آورید (آن را $D_1(h)$ بنامید) که تخمین بهتری برای $f''(x)$ باشد (یعنی دارای خطای برشی از مرتبه بالاتر از h^2 باشد).

پ) فرآیند ارائه شده در (ب) را تعمیم دهید به‌طوری‌که با استفاده از $D_{i-1}(\frac{1}{2}h)$ و $D_{i-1}(h)$ ($i = 2, 3, \dots$) تخمین بهتری برای $f''(x)$ به‌دست آورید (خطای برشی از مرتبه بالاتر از خطای برشی $D_{i-1}(h)$ باشد). مرتبه خطای برشی این رابطه جدید را برحسب h مشخص کنید.

Numerical Analysis

1) Consider a machine real number system, with machine epsilon denoted by ϵ, and let c_i, for $i = 1$ to N, be N positive machine real numbers. Consider summing them by the "algorithm",

$$s = c_1;$$
$$\text{for } i = 2 \text{ to } N$$
$$s = s + c_i;$$

Let s_N denote their exact sum, and let $\hat{s}_N$ denote their sum using machine addition, assuming no exponent overflow.

a) Show that $\hat{s}_N$ can be expressed as

$$\hat{s}_N = \sum_{j=1}^{N} c_j(1+a_j)^{N+1-j} \text{ for } |a_j| < \epsilon$$

(actually, the first term can be reduced to $c_1(1+a_1)^{N-1}$, but this is not necessary.)

b) Show that

$$\hat{s}_N = \sum_{j=1}^{N} c_j \Big(1 + (N+1-j)b_j\Big)$$

for $|b_j| < 1.06\epsilon$, if $N\epsilon < .1$

c) Show that, (if $N\epsilon < .1$)

$$|s_N - \hat{s}_N|/s_N \le \Big[(\sum_{j=1}^{N} c_j(N+1-j))/(\sum_{j=1}^{N} c_j)\Big]1.06\epsilon$$

d) Justify the claim that adding N positive numbers by this simple algorithm is a stable numerical process.

e) Use the estimate of (c) to justify the claim that ordering the numbers in increasing order of size minimizes the round off error, compared to any other ordering.

2) Prove that the error for the integration formula,

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{8}\Big[f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)\Big],$$

in of order $(b-a)^5$. In other words, if we designate the right hand side by $I(f;a,b)$, there exists a constant c dependent on f so that

$$|\int_a^b f(x)dx - I(f;a,b)| \leq c(b-a)^5.$$

(We assume that f has continuous fourth derivative on the interval (a,b).)

3) For the function $f(x) = |x|$ on the interval $[-1,1]$ and the points $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = 1$, compute a second degree polynomial of best fit (in determining the best fit, use the Chebychev's norm $\|f\| = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$).

4) Fitting a natural cubic spline, $S(x)$, for the date given below is considered:

x_i	-1	0	2	3
f_i	$\frac{1}{2}$	0	1	f_4

where f_4 is to be determined. Consider the definition given below for $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{x^2}{4}(3+x) & -1 \leq x < 0 \\ S_1(x) = \frac{x^2}{4}(3-x) & 0 \leq x < 2 \\ S_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

a) Show that S_0 and S_1 are appropriate pieces of $S(x)$ for the given data in the intervals considered above.

b) Complete the definition of $S(x)$ for the above given data and obtain relation for computing a, b, c, d and f_4 (you do not need to solve for the parameters).

5) Prove that the Newton's method, in solving the following problem, starting with any arbitrary initial point will converge to the global solution in exactly one iteration:

$$\min_{x\in R^n} \Big(\frac{1}{2}x^T Ax + x^T g + b\Big),$$

where $b, g \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$, a positive definite matrix, are all given.

6) Consider the following formula:

$$D_0(h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

a) Show that $D_0(h)$ is an estimate of $f''(x)$ (the second derivative of f at x) having a truncation error of order h^2.

b) Using $D_0(\frac{1}{2}h)$ and $D_0(h)$, find another formula (call it $D_1(h)$) which is a better estimate for $f''(x)$ (has a better truncation error).

c) Extend the process in (b) using $D_{i-1}(\frac{1}{2}h)$ and $D_{i-1}(h)(i = 2, 3, \ldots)$ to obtain a better estimate for $f''(x)$ (having a truncation error better than the one for $D_{i-1}(h)$). Show the order of the truncation error in terms of h.