بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۷۶,۲,۱۷**

موضوع امتحان: **آنالیز عددی**

۱) نشان دهید که درون‌یابی لاگرانژ از درجه n به‌طوری‌که x_i ریشه‌های کثیرالجمله چبیشف باشند عبارتست از

$$P_n(x)=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\frac{(-۱)^{i-۱}T_n(x)\sin\theta_i}{x-x_i}$$

$$\theta_i=(۲i-۱)\frac{\pi}{n}$$

۲) تابع $\log E$ که در آن $E=\int_{۰}^{\pi/۲}\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha\sin^{۲}\phi}\,d\phi$ به‌صورت زیر جدول‌بندی شده است

α°	$\log E$
۰	۰,۱۹۶۱۲۰
۵	۰,۱۹۵۲۹۳
۱۰	۰,۱۹۲۸۱۵
۱۵	۰,۱۸۸۶۹۰
۲۰	۰,۱۸۲۹۲۸

الف) مطلوبست محاسبه $\log E$ برای $\alpha=۹^\circ$ و $\alpha=۱۲^\circ۱۳'$.

ب) محاسبه حداکثر خط برای $\alpha=۹^\circ$

۳) با استفاده از روش بلوکه نمودن ماتریس A. مطلوبست محاسبه $A^{-۱}$ که در آن

$$A=\left|\begin{array}{cccc} ۱ & ۳ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۷ \\ \hdashline ۳ & ۵ & ۷ & ۶ \\ ۴ & ۶ & ۸ & ۷ \end{array}\right|$$

۴) با استفاده از نرم چبیشف، $\|.\| = \sup_{t\in[-۱,۱]} |.|$، و چهار نقطه در فاصله $[-۱,۱]$ به‌صورت $[-۱/۲,۰,۱/۲,۱]$.
مطلوبست محاسبه کثیرالجمله درجه دوم **بهترین تقریب** برای تابع $f(x)=|x|$.

۵) در نرم $L_۲$ مطلوبست بهترین تقریب برای تابع $f(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ از درجه دوم در فاصله $[-۱,۱]$.

۶) هرگاه $\{\pi_n(x)\}$ کثیرالجمله متعامد با تابع وزنه $w(x)$ در فاصله $[a,b]$ باشند آنوقت برای هر کثیرالجمله از درجه $۲n-۱$ $p_{۲n-۱}(x)$، نشان دهید

$$\int_a^b p_{۲n-۱}(x)w(x)dx = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i p_{۲n-۱}(x_i)$$

که در آن $\lambda_i = \int_a^b w(\lambda) l_i(x)dx$ و $l_i(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_i).(x-x_i)}$ و $x_i^{(n)} = x_i$ ریشه‌های کثیرالجمله $\pi_n(x)$ می‌باشند.

۷) هرگاه تابع $f(x)$، دو بار مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته در فاصله I و نقاط $x_۰, x_۱, x_۲$ متعلق به فاصله I باشند، آنوقت

$$\iint_{s_۲} f''(t_۰x_۰ + t_۱x_۱ + t_۲x_۲)dt_۱dt_۲ = f[x_۰, x_۱, x_۲]$$

که در آن $s_۲ = \{(t_۱,t_۲) \mid t_۱,t_۲ > ۰, t_۱ + t_۲ \le ۱\}$ و $t_۰ = ۱ - t_۱ - t_۲$ و $f[x_۰,x_۱,x_۲]$ تفاضل محدود از مرتبه دوم می‌باشد.

۸) از روش گوس دو نقطه‌ئی مطلوبست محاسبه $\int_{-۴}^{۴} \frac{dx}{۱+x^۲}$ و محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده.

۹) مطلوبست محاسبه خطای مرتکب شده در فرمول تقریبی انتگرال

$$I(x) = \int_۰^{۶h} f(x)dx \simeq \frac{۳h}{۱۰}[(f_۰ + f_۶) + ۵(f_۱ + f_۵) + (f_۲ + f_۴) + ۳f_۳]$$

با فرض آنکه تابع f، ۶ بار مشتق‌پذیر باشد.

۱۰) معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = \frac{۱}{۱+x^۲} - ۲y^۲ \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$ داده شده است.

اولاً: نشان دهید که جواب معادله فوق $y = \frac{x}{۱+x^۲}$ می‌باشد.

ثانیاً: از روش اویلر $h = ۰/۲$ مطلوبست محاسبه مقادیر $y(x_i)$ به‌طوری‌که $x_i = ۲ih$، که $i = ۰,۱,۲,۳,۴,۵$ و محاسبه خطای مرتکب شده در محاسبه $y(x_i)$، $i = ۰,۱,۲,۳,۴,۵$.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Numerical Analysis

1) Show that the Lagrangian Interpolation of degree n, where x_i are the roots of Chebyshev polynamial is given by

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{(-1)^{i-1}T_n(x)\sin\theta_i}{x - x_i}$$

$$\theta_i = (2i-1)\frac{\pi}{n}$$

2) The function $\log E$ where $E = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\phi}\,d\phi$ is tabulated as follows.

α^0	$\log E$
0	0.196120
5	0.195293
10	0.192815
15	0.188690
20	0.182928

a) Find $\log E$ for $\alpha = 9^0$, $\alpha = 12^0 13'$

b) Find the maximum error for the case $\alpha = 9^0$

3) Using partilianing method for the matrix A given below find A^{-1}

$$A = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ \hdashline 3 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{array}\right|$$

4) Using the Chebyshev norm ($\|.\| = \sup_{t\in[-1,1]} |.|$) and four ponits $[-1/2, 0, 1/2, 1] \subset [-1, 1]$, find the best approximation polynomial of degree 2 for the function $f(x) = |x|$.

5) Using L_2 norm, find the best polynomial of degree 2 which approximates best the function $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

6) Assume $\{\pi_n(x)\}$, are orthonormal polynomial with weight function $W(x)$ in $[a, b]$. Show that for any polynomial $p_{2n-1}(x)$ of degree $2n-1$, we have

$$\int_a^b p_{2n-1}(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{2n-1}(x_i)$$

where, $\lambda_i = \int_a^b w(\lambda)l_i(x)dx$, $l_i(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_i).(x-x_i)}$ and $x_i^{(n)} = x_i$ are roots of $\pi_n(x)$.

7) If $f(x)$ is twice continuously diffrentiable on I, where $x_0, x_1, x_2, \in I$, then

$$\iint_{s_2} f''(t_0x_0 + t_1x_1 + t_2x_2)dt_1dt_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

where $t_0 = 1 - t_1 - t_2$, $\quad s_2 = \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 > 0, t_1 + t_2 \leq 1\}$, and $f[x_0, x_1, x_2]$ is second finite difference.

8) Use Gauss two ponit formula to evaluate the following integral and estimate the maximum error committed

$$\int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2}.$$

9) If $f(x)$ is 6-times continuously differentiable find the error committed in using the following approximate formula to evaluate the integral

$$I(x) = \int_0^{6h} f(x)dx \cong \frac{3h}{10}[(f_0 + f_6) + 5(f_1 + f_5) + (f_2 + f_4) + 3f_3]$$

10) Given the following initial value problem $\begin{cases} y' = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

a) Show that $y = \frac{x}{1+x^2}$ is a solution

b) Using Euler's method with $h = 0.2$ evaluate $y(x_i)$, where $x_i = 2ih$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Also find the maximum error.