بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۷٫۳٫۱

موضوع امتحان: **آنالیزعددی**

۱ـ ثابت کنید

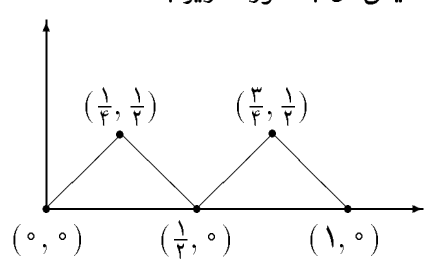
$$۲^{n-۱}\cos^{۲n}\frac{۱}{۲}\alpha=\frac{۱}{۲}(۲n)!/(n!)^۲+\sum_{r=۱}^{n}\binom{۲n}{n+r}\cos r\,\alpha \qquad (۱)$$

و از روی (۱) مطلوبست محاسبه

$$V_n(F:\theta)=\frac{(۲n)!}{۲\pi(۲n-۱)!}\int_{-\pi}^{\pi}F(\phi)\cos^{۲n}\frac{۱}{۲}(\phi-\theta)d\phi$$

به‌طوری‌که $F(\theta)=|\cos\theta|$.

۲ـ هرگاه f تابعی باشد که منحنی نمایش آن به‌صورت زیر باشد



مطلوبست محاسبه کثیرالجمله وایراشتراش $B_۲(f;x)$ و $B_۴(f;x)$ و رسم منحنی نمایش آنها.

۳ـ مطلوبست محاسبه کثیرالجمله عکس درون‌یابی نیوتن تابع $f(x)$، و از روی آن ریشه تابع $f(x)$ را به‌دست آورید.

$$f(۰)=-۳۴۲,\quad f(۱)=-۲۱۸,\quad f(۲)=۳۸۶,\quad f(۳)=۱۸۵۴$$

۴ـ هرگاه $p_n(x)$ کثیرالجمله درجه n به‌طوری‌که

$$M=\max_{-۱\le x\le ۱}|\,p_n(x).$$

آنوقت ξ موجود است به‌طوری‌که $|\xi| > 1$ داریم: $|p_n(\xi)| \leq M|T_n(\xi)|$ که در آن $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ (کثیرالجمله چیپشف).

۵ـ مطلوبست محاسبه

$$\sqrt{2}\{\frac{1}{2} - CT_1^*(x) + C^2T_2^*(x) - C^3T_3^*(x) + \cdots\}$$

که در آن $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$ و $C = 3 - 2\sqrt{2}$ و محاسبه

$$T_n'(\pm 1)$$

۶ـ مطلوبست بهترین تقریب خطی تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ درفاصله $[1, 2]$ درنرم L_2 (یعنی $\|e\| = \{\int_1^2 [e(x)]^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$).

۷ـ مطلوبست محاسبه سری فوریه، چیپشف تابع $f(x) = |x|$ در فاصله $[-1, 1]$.

۸ـ هرگاه

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t).x^n$$

که در آن $P_n(t)$ کثیرالجمله لژاندر باشد

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n].$$

مطلوبست محاسبه تابع $\phi(t)$ به‌طوری‌که

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi(t).dt}{\sqrt{1 + x^2 - 2tx}} = x + 1$$

۹ـ با انتخاب توابع پایه $\varphi_1(x) = x(1 - x)$ و $\varphi_2(x) = x^2 - x^3$، معادله دیفرانسیل $y'' = e^x$ را با شرایط سرحدی $y(0) = y(1) = 0$ از روش عناصر متناهی، گلارکین حل نمائید.

۱۰ـ معادله دیفرانسیل $y' = \sin x + \sin y$ با شرط اولیه $y(0) = 1$ با انتخاب $h = \frac{1}{4}$ تا نقطه $x = 1$ حل نمائید (روش رونگ کوتا با تقریب چهار).

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Numerical Analysis

1. Show that

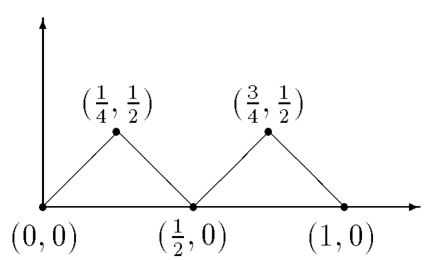
$$2^{n-1}\cos^{2n}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(2n)!/(n!)^2 + \sum_{r=1}^{n}\binom{2n}{n+r}\cos r\,\alpha \tag{1}$$

and then evaluate the following integral

$$V_n(F:\theta) = \frac{(2n)!}{2\pi(2n-1)!}\int_{-\pi}^{\pi} F(\phi)\cos^{2n}\frac{1}{2}(\phi-\theta)d\phi$$

where
$$F(\theta) = |\cos\theta|.$$

2. Let f be the function whose graph is the polygonal curve connecting the points $(0,0),(1/4,1/2),(1/2,0),(3/4,1)$,



and $(1,0)$ as show n in the figure. Find $B_2(f,x)$ and $B_4(f,x)$ and sketch the graphs of these two polynomials.

3. Use process for inverse interpolation to find the zero of $f(x)$ where

$$f(0) = -342, \quad f(1) = -218, \quad f(2) = 386, \quad f(3) = 1854$$

4. Let $p_n(x)$ be a polynomial of degree at most n. Let

$$M = \max_{-1\le x\le 1} \mid p_n(x).$$

Then for any real ξ, $|\xi| > 1$, we have $|p_n(\xi)| \leq M|T_n(\xi)|$, where $T_n(x) = \cos(n arc \cos x)$

5. Evaluate

$$\sqrt{2}\{\frac{1}{2} - CT_1^*(x) + C^2T_2^*(x) - C^3T_3^*(x) + \cdots\}$$
$$T_n^*(x) = T_n(2x-1), \quad C = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Then, evaluate $T_n'(\pm 1)$.

6. Find the best linear approximation to $\frac{1}{x}$ in the interval $[1,2]$ of the norm

$$\{\int_0^2 |e(x)|^2 dx\}^{1/2}$$

7. Evaluate Fourier-Chebyshev series of $f(x) = |x|$ on $-1 \leq x \leq 1$.

8. Suppose

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t).x^n$$

where $P_n(t)$ is Legendre polynomial defined as

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n].$$

Prove,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi(t).dt}{\sqrt{1+x^2-2tx}} = x + 1$$

for the function ϕ, as a linear combination of $P_n(x)$.

9. By choosing the base functions $\varphi_1(x) = x(1-x)$ and $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$. Solve the following differential equation

$$y'' = e^x$$

with boundary conditions $y(0) = y(1) = 0$, by finite elements method (Galerkin's Method).

10. Use Ronge-Kutta 4th approximation to solve initial value problem $\begin{array}{c} y' = \sin x + \sin y \\ y(0) = 1 \end{array}$

till $x = 1$ ($h = \frac{1}{4}$).