بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۸/۲/۹

موضوع امتحان: **آنالیز عددی**

۱ـ دستگاه معادلات غیرخطی

$$f_1(x,y) = x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$
$$f_2(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1$$

را از روش نیوتن رافسون با شرط اولیه $X = \binom{x_0}{y_0} = \binom{3.4}{2.2}$ با تقریب $\epsilon = 0.01$ حل نمائید.

۲ـ بدون استفاده ازکثیرالجمله $A - \lambda I$ مقادیر خاص و بردار خاص ماتریس A را محاسبه نمائید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۳ـ از روش گوس **سه‌نقطه‌ای** و با تقسیم فاصله $(0.2, 1)$ را به ۸ قسمت مساوی، مطلوبست محاسبه

$$I = \int_{0.2}^{1} (\sin x - lnx + e^x) dx$$

و محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده.

۴ـ هرگاه $f \in C[-\pi, \pi]$ تناوبی با دوره تناوب 2π باشد ثابت کنید که اگر

$$w(f; [-\pi,\pi]; \frac{1}{n}) \log n \longrightarrow 0 \ , \ (n \to \infty)$$

آنگاه سری فوریه تابع f به‌طور یکنواخت به تابع f همگرا خواهد بود. داریم

$$w(\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2, \in I \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

۵ـ مطلوبست محاسبه بهترین تقریب برای تابع $f = |x|$ در فاصله $[-1, 1]$ توسط کثیرالجمله درجه دوم با نرم

$$||f|| = \sup_{x \in I} |f|$$

۶ـ با استفاده از روش رونگ‌کوتا، مطلوبست حل عددی معادله دیفرانسیل

$$y' = ۰/۲۵\, y^۲ + x^۲$$
$$y(۰) = -۱$$

در فاصله $[۰, ۰/۵]$، $(h = ۰/۱)$.

۷ـ مطلوبست حل عددی معادله دیفرانسیل انتقال حرارت یک بعدی از روش تفاضل‌های متناهی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \qquad ۰ < x < ۱,\ ۰ < t < ۰/۰۲۵$$
$$u(x, ۰) = \sin \pi x \qquad (۰ \leq x \leq ۱)$$
$$u(۰, t) = u(۱, t) = ۰ \qquad (۰ \leq t \leq ۰/۰۲۵)$$

$(\ l = \frac{h^۲}{۲} = ۰/۰۰۵,\ \ h = ۰/۱\ )$.

Numerical Analysis

1) Use Newton-Raphson method to solve the nonlinear system

$$f_1(x,y) = x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$
$$f_2(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1$$

with initial conditions $X = \binom{x^0}{y^0} = \binom{3.4}{2.2}$ and the error $\epsilon = 0.01$.

2) Evaluate eigenvalues and eigenvectors of matrix A without making use of characteristic polynomial $\det(A - \lambda I)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Use three-point Gauss method with 8 equal subdivisions of the interval $(0.2, 1)$ to evaluate

$$I = \int_{0.2}^{1} (\sin x - lnx + e^x) dx$$

Determine the maximum error.

4) Let $f \in C[-\pi, \pi]$ be periodic with period 2π. Prove if

$$w(f; [-\pi, \pi]; \frac{1}{n}) \log n \longrightarrow 0 \ , \ \text{as } n \to \infty$$

then Fourier series of f converges uniformly to f, where

$$w(\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2, \in I \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

5) Find the best approximation to the function $f(x) = |x|$ in the interval $I = [-1, 1]$, using second order polynomial and supnorm $\|f\| = \sup_{x \in I} |f|$

6) Use Runge-Kutta method to solve numerically the initial value problem

$$y' = 0.25\, y^2 + x^2 \ , \quad y(0) = -1$$

in the interval $[0, 0.5]$. Use $h = 0.1$.

7) Use finite difference method to solve one dimensional heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \alpha x < 1, \ 0 < t < 0.025$$
$$u(x, 0) = \sin \pi x \qquad (0 \le x \le 1)$$
$$u(0, t) = v(1, t) = 0 \qquad (0 \le t \le 0.025)$$

use $h = 0.1$ and $l = \frac{h^2}{2} = 0.005$.