

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۹،۳،۲۷

موضوع امتحان: تحقیق در عملیات

برای سه مسئله اول، مسئله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (P)$$

که در آن $A, m \times n$ و $x, n \times 1$.(۱) نشان دهید که، حتی در حضور تباهدگی، دوران در حل مسئله (P) ایجاد نمی‌شود اگر برای هر k ، مقدار

$$\text{Minimum}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{y_i^0}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\},$$

یگانه باشد، که در آن $y_0 = B^{-1}b$ ، $y_k = B^{-1}a_k$ متغیر وارد شونده، و $B, m \times m$ پایه شدنی وابسته در جدول سمپکس k ام برای مسئله (P) است.(۲) فرض کنید x یک جواب بهینه برای مسئله (P) است. به علاوه، فرض کنید که $x_j > 0, j = 1, 2, \dots, p$ و $x_j = 0, j = p+1, \dots, n$.

الف) نشان دهید که دستگاه

$$\begin{aligned} Ad &= 0 \\ c^T d &< 0 \\ d_{p+1}, \dots, d_n &\geq 0 \end{aligned}$$

دارای هیچ جواب d در E^n نیست.ب) با استفاده از لم فارکاس (این لم را ابتدا بیان کنید)، دستگاه دیگری (موسوم به شرایط KKT) که دارای جواب است، بیان کنید.پ) مستقیماً نشان دهید که هر جواب برای شرایط KKT یک جواب بهینه برای مسئله (P) است.(۳) فرض کنید که برای مسئله (P) داریم: $m = n$ ، $c = b$ و $A = A^T$. نشان دهید که اگر یک جواب x_0 وجود داشته باشد به طوری که $Ax_0 = b$ ، $x_0 \geq 0$ ، آنگاه x_0 یک جواب بهینه برای مسئله (P) است.

(۴) مسئله اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & z = c^T x \\ \text{s.t. } & Ax \geq b \\ & x \in X, \end{aligned}$$

که در آن X یک مجموعه چندوجهی است. وابسته به این مسئله اولیه، مسئله دوگان لاگرانژی زیر را تعریف کنید:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & f(w) \\ \text{s.t. } & w \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$f(w) = w^T b + \underset{x \in X}{\text{Minimum}}(c^T - w^T A)x$$

الف) نشان دهید که اگر x^* برای مسئله اولیه شدنی باشد، و w^* برای مسئله دوگان لاگرانژی شدنی باشد، آنگاه $c^T x^* \geq f(w^*)$.

ب) فرض کنید که X ناتهی و کراندار است و مسئله اولیه یک جواب بهینه متناهی دارد. نشان دهید:

$$\begin{aligned} \text{Minimum } c^T x &= \text{Minimum } f(w). \\ Ax &\geq b & w &\geq \mathbf{0} \\ x &\in X \end{aligned}$$

(۵) تعریف: قرار دهید $S = \{x : Ax = b, x \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$ ، که در آن A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه برابر m است. یک بردار غیرصفر d را یک جهت برای S گویند اگر $x + \lambda d \in S$ برای هر $x \in S$ و هر $\lambda \geq 0$. دو جهت d_1 و d_2 برای S را متمایز گویند اگر $d_1 \neq \alpha d_2$ برای هر $\alpha > 0$. یک جهت d برای S را یک جهت فرین گویند اگر آن را نتوان به صورت یک ترکیب خطی مثبت از دو جهت متمایز نوشت، یعنی، اگر $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ ، برای $\lambda_1 > 0$ ، $\lambda_2 > 0$ ، آنگاه $d_1 = \alpha d_2$ برای برخی $\alpha > 0$. موارد زیر را ثابت کنید:

الف) $d \neq \mathbf{0}$ یک جهت برای S است اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned} Ad &= \mathbf{0} \\ d &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ب) یک بردار \bar{d} یک جهت فرین برای S است اگر و فقط اگر A را بتوان به صورت $[B \ N]$ افزایش کرد به طوری که $B^{-1}a_j \leq \mathbf{0}$ برای برخی ستون a_j از N ، و \bar{d} مضربی مثبت از $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$ باشد، که در آن e_j یک بردار $(n - m)$ بعدی با درایه‌های صفر به غیر از عدد یک در مولفه j ام است.

پ) تعداد جهت‌های فرین، برای S متناهی است.

(۶) فرض کنید که S یک مجموعه باز محدب ناتهی در E^n ، و $f : S \rightarrow E^1$ روی S مشتق‌پذیر است. ثابت کنید که f محدب است اگر و فقط اگر، برای هر $x_1, x_2 \in S$ ، داشته باشیم:

$$\{\nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)\}^T (x_2 - x_1) \geq 0.$$

Operations Research

Spring 2000

For the first three problems, consider

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (P)$$

where $A, m \times n$, and $x, n \times 1$.

- 1) Show that cycling can never occur even in the presence of degeneracy provided that a unique minimum is obtained, for every k , in the computation

$$\text{Minimum}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\},$$

where $y_0 = B^{-1}b$, $y_k = B^{-1}a_k$, x_k is the entering variable, and $B, m \times m$, is the corresponding feasible basis of the k th simplex tableau for the problem (P).

- 2) Suppose x is an optimal solution to the problem (P). Further suppose that $x_j > 0, j = 1, 2, \dots, p$, and $x_j = 0, j = p + 1, \dots, n$.

- a) Show that the system

$$\begin{aligned} Ad &= \mathbf{0} \\ c^T d &< 0 \\ d_{p+1}, \dots, d_n &\geq 0 \end{aligned}$$

has no solution d in E^n .

- b) Use Farkas' Lemma (state the Lemma first) to derive the alternative system (named *KKT* conditions) that does have a solution.

- c) Show directly that any solution to the *KKT* conditions is optimal for the problem (P).

- 3) Suppose that for the problem (P) we have $m = n, c = b$, and $A = A^T$. Show that if there exists an x_0 such that $Ax_0 = b, x_0 \geq \mathbf{0}$, then x_0 is an optimal solution for (P).

- 4) Consider the following primal problem:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \in X, \end{aligned}$$

where X is a polyhedral set. Associated with this primal problem, define the following Lagrangian dual problem:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && f(w) \\ & \text{s.t.} && w \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

where $f(w) = w^T b + \underset{x \in X}{\text{Minimum}}(c^T - w^T A)x$.

- a) Show that if x_0 is feasible to the primal problem, and w_0 is feasible to the Lagrangian dual problem, then $c^T x_0 \geq f(w_0)$.
- b) Suppose that X is nonempty and bounded and that the primal problem possesses a finite optimal solution. Show that

$$\begin{aligned} & \text{Minimum} && c^T x = \text{Maximum} && f(w). \\ & Ax \geq b && && w \geq \mathbf{0} \\ & x \in X && && \end{aligned}$$

- 5) Definition: Let $S = \{x : Ax = b, x \geq \mathbf{0}\} \neq \phi$, where A is an $m \times n$ matrix of rank m . A nonzero vector d is said to be a direction of S if $x + \lambda d \in S$ for each $x \in S$ and each $\lambda \geq 0$. Two directions d_1 and d_2 of S are called distinct if $d_1 \neq \alpha d_2$ for any $\alpha > 0$. A direction d of S is called an extreme direction if it can not be written as a positive linear combination of two distinct directions, that is, if $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, for $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, then $d_1 = \alpha d_2$ for some $\alpha > 0$.

Prove the followings:

- a) $d \neq \mathbf{0}$ is a direction of S if and only if

$$\begin{aligned} Ad &= \mathbf{0} \\ d &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

- b) A vector \bar{d} is an extreme direction of S if and only if A can be decomposed into $[B \ N]$ such that $B^{-1}a_j \leq \mathbf{0}$ for some column a_j of N , and \bar{d} is a positive multiple of $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ \epsilon_j \end{pmatrix}$, where ϵ_j is an $(n - m)$ -vector of zeros except for a 1 in position j .

- c) The number of extreme directions of S is finite.

- 6) Let S be a nonempty open convex set in E^n and let $f : S \rightarrow E^1$ be differentiable on S . Prove that f is convex if and only if, for each $x_1, x_2 \in S$, we have

$$\{\nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)\}^T(x_2 - x_1) \geq 0.$$