

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۰/۴/۸

موضوع امتحان: تحقیق در عملیات

۱- مسائل (P) و (D) را به صورت زیر در نظر بگیرید (فرض کنید $A, m \times n, c, n \times 1, b, n \times 1, m \times 1, y$):

$$\begin{array}{ll} \min z = c^T x & \max u = b^T y \\ Ax = b & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} (P) \\ (D) \end{array}$$

به موارد زیر پاسخ دهید (تنها با استفاده از اصول اولیه جبرخطی و نتایجی که خود به دست می آورید):

الف) ثابت کنید که اگر (P) و (D) هر دو شدنی باشند آنگاه هر دو مساله دارای جواب بهینه هستند و مقادیر هدف (P) و (D) در جواب بهینه برابر است.

ب) ثابت کنید که اگر (D) ناشدنی باشد آنگاه (P) یا ناشدنی است یا نامتناهی است (و برعکس).

ج) با بیان مساله‌هایی مناسب به صورت (P) و (D) و استفاده از نتایج وابسته نشان دهید که دقیقاً یکی از دستگاهای ذیل دارای جواب است.

دستگاه ۱: $Ax \leq 0$ و $c^T x > 0$.

دستگاه ۲: $A^T y = c$ و $y \geq 0$.

د) فرض کنید \bar{x} و \bar{y} به ترتیب جوابهای شدنی برای (P) و (D) باشند. ثابت کنید \bar{x} و \bar{y} به ترتیب جوابهای بهینه برای (P) و (D) هستند اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$(c_j - a_j^T \bar{y}) \bar{x}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

ه) با استفاده از نتیجه (ج) ثابت کنید که دقیقاً یکی از دستگاهای زیر دارای جواب است.

دستگاه ۳: $Ax \geq 0, c^T x > 0, x \geq 0$.

دستگاه ۴: $A^T y \geq c, y \leq 0$.

۲- فرض کنید $A, m \times n, c, m \times 1$.

الف) نشان دهید که دقیقاً یکی از دو دستگاه زیر دارای جواب است.

دستگاه ۱: $Ax = c$.

دستگاه ۲: $A^T y = 0, c^T y = 1$.

ب) نشان دهید که دو دستگاه زیر دارای جوابهای \bar{x} و \bar{y} هستند به طوری که $A\bar{x} + \bar{y} > 0$:

دستگاه ۳: $Ax \geq 0$.

دستگاه ۴: $A^T y = 0, y \geq 0$.

۳- فرض کنید S یک مجموعه محدب در $E^n, A, E^n, m \times n$ و α یک اسکالر باشند. نشان دهید که دو مجموعه زیر محدب هستند:

الف) $AS = \{y : y = Ax, x \in S\}$

ب) $\alpha S = \{\alpha x : x \in S\}$

فرض کنید $f : S \rightarrow E^1$. نشان دهید:

ج) f محدب است اگر و تنها اگر برای هر $k \geq 2$ داشته باشیم:

$$x_1, \dots, x_k \in S \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x_j),$$

که در آن $\lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, j = 1, \dots, k$.

۴- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (P)$$

فرض کنید \bar{x} یک نقطه شدنی باشد و قرار دهید: $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$. فرض کنید که f در \bar{x} مشتق پذیر و g_i برای $i \in I$ در \bar{x} مشتق پذیر و مقعر است. به علاوه فرض کنید g_i برای $i \notin I$ در \bar{x} پیوسته است. اکنون مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min & z = \nabla f(\bar{x})^T d \\ \text{s.t.} & \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad i \in I \\ & -1 \leq d_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

\bar{d} را یک جواب بهینه با مقدار بهینه \bar{z} بگیرید. نشان دهید:

الف) $\bar{z} \leq 0$.

ب) اگر $\bar{z} < 0$, آنگاه $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $\bar{x} + \lambda \bar{d}$ شدنی است و $f(\bar{x} + \lambda \bar{d}) < f(\bar{x})$ برای هر $\lambda \in (0, \delta)$.

ج) اگر $\bar{z} = 0$ آنگاه \bar{x} شرایط کرون-کیون-تاکر (KKT) را برای مساله (P) برقرار می کند.

۵- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min_{x, u} & \{-c^T x + b^T u\} \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \quad (1) \\ & -A^T u \leq -c^T \quad (2) \\ & u \geq 0 \quad (3) \\ & x \geq 0 \quad (4) \end{aligned} \quad (P)$$

مسئله (P) را در u شدنی گوئیم اگر در روابط (۲) و (۳) صدق کند. همچنین مسئله (P) را در x شدنی گوئیم اگر x در روابط (۱) و (۴) صدق کند. مسئله (P) را شدنی گوئیم اگر (P) در u و x هر دو شدنی باشد. به موارد زیر با استدلال پاسخ دهید:

الف) آیا مسئله (P) می تواند در u و x هر دو ناشدنی باشد؟

ب) آیا مسئله (P) می تواند نامتناهی باشد؟

ج) اگر مسئله (P) در u ناشدنی ولی در x شدنی باشد، نشان دهید که x شدنی وجود دارد به طوری که $c^T x$ به دلخواه بزرگ است.

د) نشان دهید که اگر مسئله (P) شدنی باشد آنگاه دارای جواب بهینه است.

۶- فرض کنید که یک جواب پایه ای شدنی بهینه با یک پایه بهینه B برای مسئله

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

در دست است. هر مورد زیر را به طور مجزا با استدلال پاسخ دهید.

الف) بردار b را به $b + \hat{b}$ تغییر دهید. تحت چه شرایطی روی بردار \hat{b} جدول بهینه تغییر نمی کند (در این حالت جواب بهینه را همراه با مقدار تابع بهینه مشخص کنید)؟ اگر جدول بهینه تغییر کند، چه روشی برای تعیین جدول بهینه مناسب است؟

ب) بردار c را به $c + \hat{c}$ تغییر دهید. تحت چه شرایطی روی \hat{c} جدول بهینه تغییر نمی کند (در این حالت جواب بهینه را همراه با مقدار تابع بهینه مشخص کنید)؟ اگر جدول بهینه تغییر کند، چه روشی برای تعیین جدول بهینه مناسب است؟

ج) ستون j ام A ، a_j را به $a_j + \hat{a}_j$ تغییر دهید. تحت چه شرایطی روی \hat{a}_j جدول بهینه تغییر نمی کند؟

د) قید $d^T x = b$ را که در آن d بردار داده شده ای است، به قیود مسئله اضافه کنید. برای مقادیر مختلف b مشخص کنید که چگونه جواب پایه ای شدنی بهینه را به دست می آورید.

Operations Research

1) Consider problems (P) and (D) as given below ($A, m \times n, x, c, n \times 1, b, y, m \times 1$):

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (P) \qquad \begin{array}{ll} \max & u = b^T y \\ & A^T y \leq c \end{array} \quad (D)$$

Using only the linear algebra principles and results you obtain below, answer the followings:

- Prove that if (P) and (D) are both feasible then both problems have optimal solutions with the same objective value.
- Prove that if (D) is infeasible then (P) is either infeasible or infinite (and vice versa).
- Stating proper problems as (P) and (D) and using the associated results show that exactly one of the following systems has a solution.

System 1: $Ax \leq 0, c^T x > 0$.

System 2: $A^T y = c, y \geq 0$.

- Let \bar{x} and \bar{y} be feasible for (P) and (D) respectively. Prove that \bar{x} and \bar{y} are optimal solutions for (P) and (D) respectively if and only if we have:

$$(c_j - a_j^T \bar{y}) \bar{x}_j = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

- Using the result in (c), prove that exactly one of the following systems has a solution:

System 3: $Ax \geq 0, x \geq 0, c^T x > 0$.

System 4: $A^T y \geq c, y \leq 0$.

2) Let A be $m \times n$ and c be $m \times 1$.

- Show that exactly one of the following two systems has a solution.

System 1: $Ax = c$.

System 2: $A^T y = 0, c^T y = 1$.

- Show that the following two systems have solutions \bar{x} and \bar{y} so that $A\bar{x} + \bar{y} > 0$:

System 3: $Ax \geq 0$.

System 4: $A^T y = 0, y \geq 0$.

3) Suppose that S is a convex set in E^n , A is $m \times n$ and α is a scalar. Show that the following two sets are convex:

a) $AS = \{y : y = Ax, x \in S\}$.

b) $\alpha S = \{\alpha x : x \in S\}$.

Let $f : S \rightarrow E^1$. Show that

c) f is convex if and only if for every $k \geq 2$, we have:

$$x_1, \dots, x_k \in S \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x_j),$$

where $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$.

4) Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{P}$$

Assume \bar{x} is a feasible point of (P) and let $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$. Suppose that f is differentiable at \bar{x} and g_i for every $i \in I$ is differentiable and concave at \bar{x} . In addition, suppose that g_i for every $i \notin I$ is continuous at \bar{x} . Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \nabla f(\bar{x})^T d \\ \text{s.t.} \quad & \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \quad , \quad i \in I \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad , \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Let \bar{d} be an optimal solution with the objective value \bar{z} . Show:

a) $\bar{z} \leq 0$.

b) If $\bar{z} < 0$ then there exists $\delta > 0$ such that $\bar{x} + \lambda \bar{d}$ is feasible and $f(\bar{x} + \lambda \bar{d}) < f(\bar{x})$ for every λ , $\lambda \in (0, \delta)$.

c) If $\bar{z} = 0$ then \bar{x} is a Karush-Kuhn-Tucker (KKT) point for the problem (P).

5) Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \min_{x, u} \quad & \{-c^T x + b^T u\} \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \quad (1) \\ & -A^T u \leq -c^T \quad (2) \\ & u \geq 0 \quad (3) \\ & x \geq 0 \quad (4) \end{aligned} \tag{P}$$

We say that (P) is feasible in u if u satisfies (2) and (3). Also (P) is feasible in x if x satisfies (1) and (4). We say that (P) is feasible if (P) is feasible in both u and x . Answer the followings with proper justifications:

- a) Is it possible that (P) be infeasible in both u and x ?
 - b) Is it possible that (P) be infinite?
 - c) If (P) is infeasible in u but feasible in x , show that feasible x exists such that $c^T x$ is arbitrarily large.
 - d) Show that if (P) is feasible then (P) has an optimal solution.
- 6) Assume we have an optimal basic feasible solution with the corresponding basis B for the following problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Answer each part below separately giving the details of your justifications:

- a) Change b to $b + \hat{b}$. Under what conditions on \hat{b} , the optimal tableau is not changed (in this case, specify the optimal solution and the optimal objective value)? If the tableau is changed, what method is appropriate for determining the optimal tableau?
- b) Change c to $c + \hat{c}$. Under what conditions on \hat{c} , the optimal tableau is not changed (in this case, specify the optimal solution and the optimal objective value)? If the tableau is changed, what method is appropriate for determining the optimal tableau?
- c) Change the j th column of A , a_j to $a_j + \hat{a}_j$. Under what condition on \hat{a}_j , the optimal tableau is not changed?
- d) Add the constraint $d^T x = b_0$, where d is a given vector, to the constraints of the problem. For various values of b_0 , specify how to determine the optimal basic feasible solution of the new problem.