بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۷۵/۲/۸**

موضوع امتحان: **تحقیق در عملیات**

۱ـ زوج برنامه‌های خطی اولیه و دوگان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{llll} Min & z = c^T x & & \\ s.t. & Ax \leq b & & (P) \\ & x \geq 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} Max & V = b^T w & & \\ s.t. & A^T w \leq c & & (D) \\ & w \leq 0 & & \end{array}$$

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ است.

الف) ثابت کنید که اگر x برای (P) شدنی و w برای (D) شدنی باشند آنگاه $b^T w \leq c^T x$.

ب) قضیهٔ لنگی مکمل برای زوج مسائل (P) و (D) را بیان کنید.

ج) قضیه‌ای را که در (ب) بیان کردید، اثبات کنید.

۲ـ فرض کنید x° یک جواب بهینه برای مسئله زیر در دست است:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & z = c^T x \\ s.t. & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

یک فاصله ماکسیمال $[\gamma_1, \gamma_2]$ را مشخص کنید که به‌ازای همه $c_k \in [\gamma_1, \gamma_2]$، نقطه x° یک جواب بهینه باقی بماند (k یک اندیس مشخص است).

۳ـ تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

تعریف ۱: برای دستگاه خطی

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

گوئیم که دستگاه دارای معادلات اضافی است اگر یک بردار $v \in E^m$، $v \neq 0$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} v^T A &= 0 \\ v^T b &= 0 \end{aligned}$$

تعریف ۲: برای دستگاه خطی

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

متغیر x_i را یک متغیر پوچ نامیم اگر در هر جواب شدنی برای دستگاه داشته باشیم $x_i = 0$. قرار دهید

$$S = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

بخش‌های ذیل را پاسخ دهید.

الف) با فرض آنکه S تهی نیست، ثابت کنید که x_i یک متغیر پوچ برای دستگاه (I) است اگر و فقط اگر یک بردار $v \in R^m$، $v \neq 0$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} v^T A &\geq 0 \\ v^T b &= 0 \end{aligned}$$

و مؤلفه iـام بردار $v^T A$ مثبت است ($v^T a_i > 0$).

ب) از وجود v به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} v^T A &= 0 \\ v^T b &\neq 0, \end{aligned}$$

چه نتایجی در مورد دستگاه (I) به‌دست می‌آورید؟ جواب خود را با استدلال اثبات کنید.

۴ـ فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و $b \in E^m$، $b \geq 0$.

ثابت کنید:

$$(Ax \leq b \Longrightarrow c^T x \leq 0)$$

اگر و فقط اگر

$$(\lambda \geq 0 \text{ برای برخی } c^T = \lambda^T A)$$

۵ـ فرض کنید $\{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$ یک مجموعه متناهی است و $x^i \in E^n$، $1 \leq i \leq m$. پوسته محدب این مجموعه را $\bar{X}$ بنامید.

الف) نشان دهید که اعداد حقیقی نامنفی λ^1، λ^2، ...، λ^m وجود دارند به‌طوری‌که

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^i = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda^i x^i = \bar{X}.$$

ب) با استفاده از نتیجه مذکور در (الف)، نشان دهید که λ^iها را می‌توان به گونه‌ای انتخاب نمود که حداکثر $(n+1)$ تعداد از آنها ناصفر باشند.

(می‌توانید از هر نتیجه‌ای در خصوص برنامه‌ریزی خطی استفاده کنید منوط بر آنکه آن نتایج را به روشنی بیان کنید.)

Operations Research

1) Consider the dual pair of linear programs

$$
\begin{array}{lll}
Min & z = c^T x & \\
s.t. & Ax \leq b & (P) \\
 & x \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
Max & V = b^T w & \\
s.t. & A^T w \leq c & (D) \\
 & w \leq 0 &
\end{array}
$$

where A is an $m \times n$ matrix.

a) Prove that if x is feasible to (P) and w is feasible to (D), then $b^T w \leq c^T x$.

b) State complementary slackness theorem for the pair of problems, (P) and (D).

c) prove the theorem you stated in part (b).

2) Assume that x^0 is an optimal point for the problem

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} & z = c^T x \\
s.t. & Ax \leq b \\
 & x \geq 0.
\end{array}
$$

Determine a maximal interval $[\gamma_1, \gamma_2]$ so that for all $c_k \in [\gamma_1, \gamma_2]$, the point x^0 will remain optimal.

(the index k is known).

3) Consider the following definitions:

Definition 1: For the linear system, in which A is $m \times n$,

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

we say that system has **superfluous** equations if there exists $v \in E^m$, $v \neq 0$ so that

$$\begin{aligned} v^T A &= 0 \\ v^T b &= 0 \end{aligned}$$

Definition 2: For the linear system

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

we say that x_i is a **null** variable if for every feasible solution of (I) we have $x_i = 0$.

Let

$$S = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

Answer the following parts:

a) Assume S is nonempty. Prove that x_i is a null variable for the system (I) if and only if there exists $v \in R^m$, $v \neq 0$, so that

$$\begin{aligned} v^T A &\geq 0 \\ v^T b &= 0 \end{aligned}$$

and the i-th the component of $v^T A$ is positive ($v^T a_i > 0$).

b) For the system (I), what is the implications of the existence of v so that

$$\begin{aligned} v^T A &= 0 \\ v^T b &\neq 0? \end{aligned}$$

Prove you answer.

4) Suppose A is $m \times n$, $b \in E^m$ and $b \geq 0$.

Prove:

$$(Ax \leq b \Longrightarrow c^T x \leq 0)$$

if and only if

$$(c^T = \lambda^T A \text{ for some } \lambda \geq 0)$$

5) Suppose $\{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$ is a finite set of elements $x^i \in E^n$ and let $\bar{X}$ be the convex hull of this set.

a) Show that nonnegative real numbers λ^1, λ^2, $\ldots$, λ^m exist so that

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^i = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda^i x^i = \bar{X}.$$

b) Using the result in (a), show that one can choose λ^i's in a way that at most $(n+1)$ of them are nonzero. (You can use any results from linear programming provided that you state them clearly.)