

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۶/۲/۱۶

موضوع امتحان: تحقیق در عملیات

(۱) فرض کنید  $x^*$  یک جواب شدنی برای مسئله (LP) زیر است:

$$\begin{aligned} \min_{z \in R^n} \quad & z = c^T x \\ & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq u \end{aligned} \quad (LP)$$

که در آن  $c \in R^n$ ,  $A \in R^{m \times n}$ ,  $b \in R^m$ ,  $u \in R^n$  داده شده‌اند. ثابت کنید که  $x^*$  برای مسئله (LP) بهینه است اگر و فقط اگر یک بردار  $w$  وجود داشته باشد بطوریکه

$$\begin{aligned} x_j^* > 0 &\Rightarrow w^T a_j \geq c_j & j = 1, \dots, n \\ x_j^* < u_j &\Rightarrow w^T a_j \leq c_j & j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

(۲) الف) مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \end{aligned}$$

ب) مقادیر  $\delta$  (در صورت وجود) را مشخص کنید به‌طوریکه برای  $b = \begin{bmatrix} 4 + \delta \\ 3 + \delta \\ 3 + \delta \end{bmatrix}$  پایه بهینه مسئله در الف)

عوض نشود. برای این‌گونه تغییرات در  $b$  مقدار تابع هدف چیست؟

اگر  $\delta$  به‌گونه‌ای باشد که پایه بهینه عوض شود، آنگاه با استفاده از جدول بهینه در الف) از چه روشی مسئله را حل می‌کنید و چرا؟

پ) مقادیر  $\theta$  (در صورت وجود) را مشخص کنید به طوری که برای

$$c = \begin{bmatrix} 2 + \theta \\ 4 + \theta \\ 1 + \theta \\ 1 + \theta \end{bmatrix}$$

پایه بهینه در الف) عوض

نشود. برای اینگونه تغییرات در  $c$  مقدار تابع هدف چیست؟

اگر  $\theta$  به گونه ای باشد که پایه بهینه عوض شود، آنگاه با استفاده از جدول بهینه در الف) از چه روشی مسئله را حل می کنید و چرا؟

۳) مسئله (P) در زیر مورد نظر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ & Ax = b \\ & \ell \leq x \leq u \end{aligned} \quad (P)$$

که در آن  $\ell$  و  $u$  بردارهای مشخص با درایه های متناهی هستند.

الف) با استفاده از دوگان مسئله (P) ثابت کنید که مسئله (P) نمی تواند نامتناهی باشد.

ب) دوگان مسئله (P) را  $(P')$  بنامید. در خصوص امکان ۹ مورد نشان داده شده در جدول زیر بحث و استدلال کنید.

دارای جواب بهینه	نامتناهی	ناشدنی	مسئله (P)
			مسئله (P')
		ناشدنی	
		نامتناهی	
		دارای جواب بهینه	

۴) فرض کنید  $x^*$  یک جواب بهینه برای مسئله (P) در زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

که در آن  $a'_i$  سطر  $i$ -ام ماتریس  $A$  است

فرض کنید که  $w^*$  یک جواب بهینه برای دوگان مسئله (P) است.

ثابت کنید که  $x^*$  یک جواب بهینه برای مسئله زیر نیز هست:

$$\begin{aligned} \min \quad & z' = (c^T - w_k^* a_k')x \\ \text{s.t.} \quad & a_i'x = b_i \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن  $w_k^*$  مولفه  $k$ -ام  $w^*$  است.

(۵) با استفاده از اصول اولیه (تعاریف اولیه تحدب)،

الف) نشان دهید که مجموعه

$$S = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

محدب است.

ب) نشان دهید که تابع  $f(x) = c^T x$  بر روی  $S$  (تعریف شده در الف) یک تابع محدب است.

پ) ثابت کنید که برای مسئله برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

اگر یک جواب بهینه  $x^*$  وجود داشته باشد آنگاه  $x^*$  یک جواب بهینه سراسری است.

(۶) دوگان مسئله (P) در زیر را بنویسید:

$$\begin{aligned} \min_{z,y} \quad & g^T z - f^T y \\ \text{s.t.} \quad & y - z = c \\ & y, z \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

که در آن  $f, g, c$  بردارهای داده شده با مقادیر متناهی هستند.

الف) با استفاده از دوگان مسئله (P)، شرایطی را مشخص کنید که تحت آن‌ها مسئله (P) دارای جواب بهینه محدود است (استدلال کنید).

ب) مسئله دوگان با شرایط الف) را حل کنید و مقدار بهینه تابع هدف را مشخص کنید.

## Ph.D. Entrance Examination

### Operational Research

1) Let  $x^0$  be a feasible point for the problem (LP) below:

$$\begin{aligned} \min_{z \in R^n} \quad & z = c^T x \\ & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq u \end{aligned} \quad (LP)$$

where  $c \in R^n$ ,  $A$ ,  $m \times n$ ,  $b \in R^m$ ,  $u \in R^n$  are all given.

Prove that  $x^0$  is an optimal solution for the problem (LP) if and only if there exists  $w$  such that

$$\begin{aligned} x_j^0 > 0 &\Rightarrow w^T a_j \geq c_j & j = 1, \dots, n \\ x_j^0 < u_j &\Rightarrow w^T a_j \leq c_j & j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

2) Solve the linear programming problem given below:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \end{aligned}$$

a) Specify the values of  $\delta$  (if exists) so that for  $b = \begin{bmatrix} 4 + \delta \\ 3 + \delta \\ 3 + \delta \end{bmatrix}$  the optimal basis

in (a) does not change. For such values of  $\delta$ , what is the optimal value of the objective function? If  $\delta$  is so that the optimal basis is changed, then, using the optimal tableau in (a), what method do you choose to solve the problem and why?

c) Specify the values of  $\theta$  (if it exists) so that for  $c = \begin{bmatrix} 2 + \theta \\ 4 + \theta \\ 1 + \theta \\ 1 + \theta \end{bmatrix}$  the optimal basis

does not change. For such values of  $\theta$ , what is the optimal value of the objective function? If  $\theta$  is so that the optimal basis is changed, then, using the optimal tableau in (a), what method do you choose to solve the problem and why?

3) Consider the problem (P) below:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ & Ax = b \\ & \ell \leq x \leq u \end{aligned} \tag{P}$$

where  $\ell$  and  $u$  are given vectors with bounded components.

- Using the dual of (P), prove that the problem (P) can not have an unbounded solution (can not be unbounded).
- Let (P') be the dual of (P). Discuss and provide the reasons for the possibilities (or impossibilities) of the nine cases shown in the table below:

problem (P)	infeasible	unbounded	optimal solution
problem (P')			
infeasible			
unbounded			
optimal solution			

4) Assume that  $x^*$  is an optimal solution for the problem (P) below:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \left( \begin{array}{l} a'_i x = b_i \\ i = 1, \dots, m \\ \text{where } a'_i \text{ is the } i\text{-th row of } A \end{array} \right) \tag{P}$$

Assume that  $w^*$  is an optimal solution for the dual of (P).

Prove that  $x^*$  is an optimal solution for the problem below:

$$\begin{aligned} \min \quad & z' = (c^T - w_k^* a'_k) x \\ \text{s.t.} \quad & a'_i x = b_i \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

where  $w_k^*$  is the  $k$ -th component of  $w^*$ .

5) Using the first principles (elementary definitions of convexity),

a) Show that the set

$$S = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

is convex.

b) Show that the function  $f(x) = c^T x$  is a convex function on the set  $S$  as defined in (a) above.

c) Prove that for the linear programming problem.

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

if an optimal solution  $x^*$  exists then  $x^*$  is a global optimal solution.

6) Solve the dual of the problem (P) below:

$$\begin{aligned} \min_{z,y} \quad & = g^T z - f^T y \\ \text{s.t.} \quad & y - z = c \\ & y, z \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

where,  $f$ ,  $g$  and  $c$  are given vectors with bounded components.

a) Use the dual to find conditions under which the primal has a bounded solution.

b) Under the conditions of (a), solve the dual problem and compute the optimal value of the objective function.