بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۷۷/۲/۳۱**

موضوع امتحان: **تحقیق در عملیات**

توجه: در پاسخ به سؤالات ۱ و ۲ می‌توانید از هر نتیجه‌ای در برنامه‌ریزی خطی استفاده کنید منوط بر آنکه نتیجه مزبور را به دقت و روشنی بیان کنید.

۱ـ فرض کنید A و D به‌ترتیب ماتریس‌های $m \times n$ و $p \times n$ باشند و $b \in R^m$، $d \in R^p$، $c \in R^n$ و $z \in R$.

الف) نشان دهید که دستگاه

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Dx &\leq d \end{aligned}$$

شدنی نیست (دارای جواب نیست) اگر و فقط اگر دستگاه

$$\begin{aligned} u^T A + v^T D &= 0^T \\ u^T b + v^T d &< 0 \\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

شدنی باشد (دارای جواب باشد).

ب) نشان دهید که دستگاه

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Dx &\leq d \\ c^T x &> z \end{aligned}$$

شدنی است اگر و فقط اگر دستگاههای

$$\begin{aligned} u^T A + v^T D &= c^T \\ u^T b + v^T d &\leq z \\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} u^T A + v^T D &= 0^T \\ u^T b + v^T d &< 0 \\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

شدنی نباشند.

۲ـ فرض کنید که A یک ماتریس $m \times n$ است و $c \in R^n$، $b \in R^m$، $x \in R^n$.

الف) نشان دهید که برنامه خطی (LP)،

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (LP)$$

نامتناهی است اگر و فقط اگر بردار $d \in R^n$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} Ad &= 0 \\ d &\geq 0 \\ c^T d &< 0. \end{aligned}$$

ب) نشان دهید که ناحیه شدنی

$$X = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

از بالا کراندار است اگر و فقط اگر $u \in R^m$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$u^T A > 0^T.$$

پ) فرض کنید که ناحیه

$$X = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

شدنی و کراندار است. فرض کنید $c \in R^n$ برداری اختیاری است، نشان دهید که مجموعه u_c مطابق تعریف زیر

$$u_c = \{u \in R^m \mid u^T A \leq c^T\}$$

کراندار نیست.

۳ـ برنامه‌خطی (P) در زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \leq 0 \end{aligned} \qquad (P)$$

الف) دوگان (D) برنامه (P) را بنویسید.

ب) نشان دهید که اگر x برای (P) شدنی و u، متغیر دوگان، برای D شدنی باشند، آنگاه

$$c^T x \geq u^T b.$$

پ) شرایط لنگی مکمل را برای زوج مسائل (P) و (D) بنویسید.

ت) فرض کنید که $\overline{x}$ برای (P) و $\overline{u}$ برای (D) شدنی باشند و $(\overline{x},\overline{u})$ شرایط لنگی مکمل را صدق دهد. ثابت کنید که $\overline{x}$ و $\overline{u}$ به‌ترتیب برای (P) و (D) بهینه هستند.

۴ـ تابع درجه دوم، $q(x)$، را در نظر بگیرید:

$$q(x) = \frac{1}{2}x^T\overline{G}x + g^Tx + c$$

که در آن $\overline{G}$، $n \times n$، $g, x \in R^n$ و $c \in R$.

الف) نشان دهید که $q(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$q(x) = \frac{1}{2}x^TGx + g^Tx + c$$

که در آن G متقارن است.

ب) تعیین کنید که $\overline{x}$ چه رابطه‌ای را صدق دهد تا داشته باشیم:

$$q(x) = q(\overline{x}) + \frac{1}{2}(x-\overline{x})^TG(x-\overline{x}).$$

ادعای خود را اثبات کنید.

پ) آیا $\overline{x}$ مطابق (ب) همواره موجود است؟ شرایط لازم و کافی را برای وجود $\overline{x}$ تعیین کنید.

ت) فرض کنید که $\overline{x}$ مطابق (ب) موجود است. تحت چه شرایطی $\overline{x}$ یک جواب برای مسئله $\min_x q(x)$ است؟ (هم شرایط لازم و هم شرایط کافی را ذکر کنید.) تحت چه شرایطی $\overline{x}$ یگانه جواب مسئله است؟

ث) ثابت کنید که $q(x)$ محدب است اگر و فقط اگر G نیمه معین مثبت باشد. (اثبات را با استفاده از تعاریف و مفاهیم اولیه تحدب ارائه دهید.)

۵ـ فرض کنید که یک جواب پایه‌ای شدنی بهینه با یک پایه بهینه B برای مسئله

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^Tx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

در دست است. هر مورد در زیر را به‌طور مجزا پاسخ دهید.

الف) بردار b را به $b(\lambda) = b + \lambda r$ برای یک بردار داده شده r تغییر دهید. برای چه مقادیر λ، در صورت وجود، جواب موجود دیگر یک جواب بهینه شدنی نیست؟

ب) بردار c را به $c(\lambda) = c + \lambda s$ برای یک بردار داده شده s تغییر دهید. برای چه مقادیر λ، جواب موجود یک جواب بهینه باقی می‌ماند، برای چنین λ، مقدار تابع هدف چیست؟

پ) قید

$$d^T x \geq b_\circ$$

را، که در آن d بردار داده شده‌ای است، به مسئله اضافه کنید. برای مقادیر مختلف $b_\circ$ ذکر کنید (با ارائه دلیل) که چگونه جواب پایه‌ای شدنی بهینه تعیین می‌شود.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Operations Research

Note: In answering questions 1 and 2 you may use any result from linear programming provided that the result is stated clearly.

1. Let A, D be matrices of size $m \times n$ and $p \times n$, respectively, $b \in R^m$, $d \in R^p$, $c \in R^n$ and $z \in R$.

i) Show that the system

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Dx &\leq d \end{aligned}$$

is not feasible (has no solution) if and only if the system

$$\begin{aligned} &u^T A + v^T D = 0^T \\ &u^T b + v^T d < 0 \\ &v \geq 0 \end{aligned}$$

is feasible (has a solution).

ii) Show that the system

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Dx &\leq d \\ c^T x &> z \end{aligned}$$

is feasible (has a solution) if and only if the systems

$$\begin{aligned} &u^T A + v^T D = 0^T \\ &u^T b + v^T d < 0 \\ &v \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{and} \qquad \begin{aligned} &u^T A + v^T D = c^T \\ &u^T b + v^T d \leq z \\ &v \geq 0 \end{aligned}$$

are not feasible (have no solution).

2. Assume A is $m \times n$, $c \in R^n$, $b \in R^m$ and $x \in R^n$.

i) Show that the linear program (LP),

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{LP}$$

has an unbounded optimum if and only if there exists $d \in R^n$ such that

$$\begin{aligned} Ad &= 0 \\ d &\geq 0 \\ c^T d &< 0. \end{aligned}$$

ii) Show that the feasible region

$$X = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

is bounded if and only if there exists a $u \in R^m$ such that

$$u^T A > 0^T.$$

iii) Assume that the region

$$X = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

is feasible and bounded and that $c \in R^n$ is arbitrary. Show that u_c, as below,

$$u_c = \{u \in R^m \mid u^T A \leq c^T\}$$

is not bounded.

3. Consider the linear program (P) below:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \leq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

i) Write down the dual (D) of (P).

ii) Show that if x is feasible to (P) and u, the dual variable, is feasible to (D), then

$$c^T x \geq u^T b.$$

iii) Write down the complementary slackness for the pair of problems (P) and (D).

iv) Suppose that $\overline{x}$ is feasible to (P) and $\overline{u}$ is feasible to (D) and the pair $(\overline{x}, \overline{u})$ satisfy complementary slackness, prove that $\overline{x}$ and $\overline{u}$ optimal to (P) and (D) respectively.

4. Consider the quadratic function, $q(x)$,

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T \overline{G} x + g^T x + c$$

where $\overline{G}$ is and $n \times n$ matrix and $g, x \in R^n$, $c \in R$.

i) Show that $q(x)$ can be written as

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + g^T x + c$$

where G is symmetric.

ii) What relation for $\overline{x}$ should hold so that

$$q(x) = q(\overline{x}) + \frac{1}{2}(x - \overline{x})^T G (x - \overline{x}).$$

Prove your claim.

iii) Does $\overline{x}$ as in (ii) always exist? Indicate the necessary and sufficient conditions for the existence of $\overline{x}$.

iv) Assume that $\overline{x}$ as in (ii) exists. Under what conditions $\overline{x}$ is a solution to $\min_x q(x)$? (Indicate both the necessary and the sufficient conditions.) When is $\overline{x}$ a unique solution?

v) Prove the $q(x)$ is convex if and only if G is positive semidefinite. (The proof should be given using only basic principles and definitions of convexity.)

5. Assume an optimal basic feasible solution with an optimal basic B for the problem

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

is known. Consider each case below separately.

i) Change b to $b(\lambda) = b + \lambda r$ for a given vector r. For what value of λ, if any, the present solution will no longer be an optimal basic feasible solution?

ii) change c to $c(\lambda) = c + \lambda s$ for a given vector s. For what value of λ the present solution will remain an optimal solution? For each such λ, what would the optimal objective value be?

iii) Add the constraint

$$d^T x \geq b_0$$

for a given vector d. For various values of b_0 indicate and prove how the optimal basic feasible solution is determined.