

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۸/۲/۱۰

موضوع امتحان: تحقیق در عملیات

۱) در موارد (الف) - (د) در زیر، فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$ ،  $B$  یک ماتریس  $l \times n$  و  $C$  یک بردار  $n \times 1$  باشند.

الف) قضیه فارکاس: ثابت کنید که دقیقاً یکی از دستگاههای زیر دارای جواب است:

دستگاه ۱:  $Ax \leq 0, c^T x > 0$  برای برخی  $x \in E^n$ .

دستگاه ۲:  $A^T y = c, y \geq 0$  برای برخی  $y \in E^m$ .

برای هر یک از موارد (ب) - (د)، تنها با استفاده از قضیه فارکاس ثابت کنید که دقیقاً یکی از دو دستگاه دارای جواب است:

ب) دستگاه ۱:  $Ax < 0$  برای برخی  $x \in E^n$ .

دستگاه ۲:  $A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0$  برای برخی  $y \in E^m$ .

ج) دستگاه ۱:  $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0$  برای برخی  $x \in E^n$ .

دستگاه ۲:  $A^T y \geq c, y \geq 0$  برای برخی  $y \in E^m$ .

د) دستگاه ۱:  $Ax \leq 0, Bx = 0, c^T x > 0$  برای برخی  $x \in E^n$ .

دستگاه ۲:  $A^T y \geq c, y \geq 0$  برای برخی  $y \in E^m$ .

۲) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $p \times n$  و  $B$  یک ماتریس  $q \times n$  باشند.

الف) نشان دهید که اگر دستگاه ۱ در زیر دارای جواب نباشد، آنگاه دستگاه ۲ دارای جواب است:

دستگاه ۱:  $Ax < 0, Bx = 0$  برای برخی  $x \in E^n$ .

دستگاه ۲:  $A^T u + B^T v = 0, u \geq 0$  برای برخی  $(u, v)$  مخالف صفر.

ب) نشان دهید که اگر  $B$  رتبه کامل باشد، آنگاه دقیقاً یکی از دستگاههای آمده در (الف) دارای جواب است.

ج) اگر  $B$  رتبه کامل نباشد، آیا مورد (ب) لزوماً درست است؟ پاسخ خود را ثابت کنید یا یک مثال نقض ارائه دهید.

د) نشان دهید که دقیقاً یکی از دستگاههای زیر دارای جواب است:

دستگاه ۱:  $Ax < 0, Bx = 0$  برای برخی  $x \in E^n$ .

دستگاه ۲:  $A^T u + B^T v = 0, u \geq 0, u \neq 0$  برای برخی  $(u, v)$ .

(۳) مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{x} \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax = b \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با رتبه  $m$  است. فرض کنید که  $x$  یک نقطه فرین (پایه‌ای) با پایه متناظر  $B$  است.

الف) فرض کنید که  $B^{-1}b \geq 0$ . با استفاده از قضیه فارکاس (مسئله ۱ الف)، نشان دهید که  $x$  یک نقطه بهینه است اگر و فقط اگر  $c^T B^{-1}N - c_N^T \leq 0^T$ .

ب) قرار دهید  $\bar{b} = B^{-1}b$  و فرض کنید که  $\bar{b}_i = 0$  برای برخی  $i$ . آیا امکان دارد که  $x$  یک نقطه بهینه باشد حتی اگر  $c^T B^{-1}a_j - c_j > 0$  متناظر با یک متغیر غیر پایه‌ای  $x_j$ ؟ بحث کنید و اگر چنین امکانی وجود دارد، یک مثال برای آن ارائه دهید.

(۴) فرض کنید که  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با رتبه  $m$ ،  $c$  یک بردار  $n \times 1$  و  $b$  یک بردار  $m \times 1$  باشند. مسئله  $P$  را بر طبق تعریف زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} P : & \text{Minimize}_{x} \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax = b \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

الف) نشان دهید که  $P$  ناشدنی است (دستگاه دارای جواب نیست) اگر و فقط اگر مسئله زیر نامتناهی باشد.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{y} \quad b^T y \\ & \text{s.t.} \quad A^T y \leq 0. \end{aligned}$$

ب) فرض کنید که مسئله  $P$  نامتناهی باشد. آیا یک بردار  $b'$  ( $b' \neq b$ ) به جای  $b$  وجود دارد که به‌ازای آن مسئله  $P$  دارای جواب بهینه باشد؟ برای درستی پاسخ خود استدلال کنید.

(۵) مسئله (P) به صورت زیر مورد نظر است:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{x} \quad f(x) \\ & \text{s.t.} \quad x \in S \end{aligned} \tag{P}$$

که در آن  $f : E^n \rightarrow E^1$  یک تابع محدب و مشتق‌پذیر، و  $S$  یک مجموعه ناتهی محدب در  $E^n$  است. ثابت کنید که  $x^*$  یک جواب بهینه برای (P) است اگر و فقط اگر برای هر  $x \in S$ ،  $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$ .

(۶) مسئله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize}_{x \in R^n} \quad f(x) \\ & \text{s.t.} \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

که در آن  $f$  یک تابع محدب مشتق‌پذیر است. برای یک نقطه  $\bar{x}$  بردار  $\nabla f(\bar{x})$  را با  $(\nabla_1, \dots, \nabla_n)^T$  نشان دهید؛ یعنی،  $\nabla_i = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$ . نشان دهید  $\bar{x}$  یک جواب بهینه برای (P) است اگر و فقط اگر  $d = 0$  که مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$d_i = \begin{cases} -\nabla_i & \text{اگر } x_i > 0 \text{ یا } \nabla_i < 0 \\ 0 & \text{اگر } x_i = 0 \text{ و } \nabla_i \geq 0 \end{cases}$$

# Operations Research

1) In parts (a) - (d) below, let  $A$  be an  $m \times n$ ,  $B$  be  $l \times n$  and  $c$  be  $n \times 1$ .

a) Farkas' theorem: Prove that exactly one of the following two systems has a solution:

$$\text{System 1: } Ax \leq 0, \quad c^T x > 0 \text{ for some } x \in E^n.$$

$$\text{System 2: } A^T y = c, \quad y \geq 0 \text{ for some } y \in E^m.$$

for parts (b) - (d), prove, using Farkas' theorem only, that exactly one of the two systems has a solution.

b) System 1:  $Ax < 0$  for some  $x \in E^n$ .

$$\text{System 2: } A^T y = 0, \quad y \geq 0, \quad y \neq 0 \text{ for some } y \in E^m.$$

c) System 1:  $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0$  for some  $x \in E^n$ .

$$\text{System 2: } A^T y \geq c, \quad y \geq 0 \text{ for some } y \in E^m.$$

d) System 1:  $Ax \leq 0, Bx = 0, c^T x > 0$  for some  $x \in E^n$ .

$$\text{System 2: } A^T y \geq c, \quad y \geq 0 \text{ for some } y \in E^m.$$

2) Let  $A$  be  $p \times n$  and  $B$  be  $q \times n$ .

a) Show that if system 1 below has no solution, then system 2 has a solution:

$$\text{System 1: } Ax < 0, \quad Bx = 0 \text{ for some } x \in E^n.$$

$$\text{System 2: } A^T u + B^T v = 0, \quad u \geq 0 \text{ for some nonzero } (u, v).$$

b) Show that if  $B$  has a full rank, then exactly one of the systems in (a) has a solution.

c) Is part (b) necessarily true if  $B$  is not of full rank? Prove, or give a counterexample.

d) Show that exactly one of the following systems has a solution:

$$\text{System 1: } Ax < 0, \quad Bx = 0 \text{ for some } x \in E^n.$$

$$\text{System 2: } A^T u + B^T v = 0, \quad u \geq 0, \quad u \neq 0 \text{ for some } (u, v).$$

3) Consider the following problem:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{Minimize}} && c^T x \\ & \text{s.t.} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

where  $A$  is an  $m \times n$  matrix of rank  $m$ . Let  $x$  be an extreme point with corresponding basis  $B$ .

- a) Suppose that  $B^{-1}b > 0$ . Use Farkas' theorem to show that  $x$  is an optimal point if and only if  $c_B^T B^{-1}N - c_N^T \leq 0^T$ .
- b) Let  $\bar{b} = B^{-1}b$  and suppose that  $\bar{b}_i = 0$  for some component  $i$ . Is it possible that  $x$  is an optimal solution even if  $c_B^T B^{-1}a_j - c_j > 0$  for some nonbasic  $x_j$ ? Discuss and give an example if this is possible.
- 4) Let  $A$  be  $m \times n$  with rank  $m$ ,  $c$  be  $n \times 1$  and  $b$  be  $m \times 1$ . Let problem  $P$  be defined as below:

$$P : \begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- a) Show that  $P$  is infeasible if and only if the following problem is unbounded.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \leq 0. \end{array}$$

- b) Assume that problem  $P$  above is unbounded. Is there a right hand side  $b'(b' \neq b)$  in place of  $b$  for which problem  $P$  has an optimal solution? Discuss the validity of your answer.
- 5) Consider the problem (P) below:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in S \end{array} \quad (P)$$

where  $f : E^n \rightarrow E^1$  is a differentiable convex function, and  $S$  is a nonempty convex set in  $E^n$ . Prove that  $x^*$  is an optimal solution for (P) if and only if

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \text{for each } x \in S.$$

- 6) Consider the problem (P) below:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{s.t.} & x \geq 0 \end{array} \quad (P)$$

where  $f$  is a differentiable convex function. Let  $\bar{x}$  be a given point and denote  $\nabla f(\bar{x})$  by  $(\nabla_1, \dots, \nabla_n)^T$ ; that is,  $\nabla_i = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$ . Show that  $\bar{x}$  is an optimal solution for (P) if and only if  $d = 0$ , where  $d$  is defined by

$$d_i = \begin{cases} -\nabla_i & \text{if } x_i > 0 \text{ or } \nabla_i < 0 \\ 0 & \text{if } x_i = 0 \text{ and } \nabla_i \geq 0 \end{cases}$$