بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۱٫۳٫۳

موضوع امتحان: **بهینه‌سازی**

۱ـ هر یک از قضیه‌های چاره‌ای زیر را با استفاده از نظریه دوگانی مستقلاً ثابت کنید. فرض کنید $A \in R^{m\times n}$ یک ماتریس اختیاری است.

قضیه ۱:

الف) $x \in R^n$ وجود دارد به‌طوری که $Ax > 0$.

یا

ب) $y \geq 0$ وجود دارد به‌طوری که $A^T y = 0$ و $\sum_{i=1}^{m} y_i > 0$.

قضیه ۲:

الف) $z > 0$ وجود دارد به‌طوری که $A^T z = 0$.

یا

ب) $x \in R^n$ وجود دارد به‌طوری که $Ax \geq 0$ و $Ax \neq 0$.

۲ـ مساله برنامه‌ریزی خطی (P) به‌صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax \leq b \end{aligned} \qquad (P)$$

را، که در آن $A \in R^{m\times m}$، $b \in R^m$، $b \geq 0$، در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید: مساله (P) دارای جواب بهینه است اگر و تنها اگر $\lambda \in R^m$ موجود باشد به‌طوری که

$$\begin{aligned} c - A^T\lambda = 0 \\ \lambda \leq 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

ب) فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه شدنی برای مساله (P) است و $\bar{\lambda}$ در شرایط (*) صدق می‌کند. شرایط اضافی لازم و کافی را در خصوص $\bar{\lambda}$ و $\bar{x}$ بیان کنید برای آنکه $\bar{x}$ جواب بهینه مساله (P) باشد. ادعای خود را ثابت کنید.

۳ـ مساله (P) به‌صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x^T B x \\ s.t. \quad & Bx = b \qquad\qquad (P) \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

را، که در آن B یک ماتریس حقیقی پاد متقارن ($B = -B^T$) است، در نظر بگیرید. ادعاهای زیر را ثابت یا رد کنید.

ادعای ۱: اگر (P) شدنی باشد آنگاه (P) دارای جواب بهینه است.

ادعای ۲: اگر B وارونپذیر باشد آنگاه (P) دارای جواب بهینه است.

ادعای ۳: مساله (P) می‌تواند نامتناهی باشد.

ادعای ۴: دوگان مساله (P) همواره شدنی است.

۴ـ مساله (P) به‌صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \qquad\qquad (P) \\ & x \geq \circ \end{aligned}$$

را، که در آن A، $m \times n$، در نظر بگیرید.

فرض کنید رتبه $(A) = m$. می‌دانیم که روش سمیپلکس دوگان برای حل مساله (P) به یک جدول سمیپلکس دوگان شدنی اولیه نیاز دارد. رویه زیر را در نظر بگیرید:

۱) m ستون مستقل خطی از A را مشخص کن و آنها را ستونهای ماتریس B قرار ده.

۲) قرار ده $b^* = Bx$، که در آن $x \geq \circ$.

۳) مساله (P) را با جایگزینی b توسط b^* با روش سمیپلکس اولیه حل کن.

۴) b^* را با b در جدول بهینه جایگزین کن و طرف راست وابسته را در جدول به‌دست آور.

الف) توضیح دهید که چگونه ممکن است یک جدول دوگان شدنی طبق رویه بالا در دست باشد (توضیح دهید که چگونه قدمهای (۱) و (۴) انجام می‌گیرد).

ب) آیا ممکن است که رویه بالا با شکست مواجه شود؟ برای پاسخ خود استدلال کنید.

پ) نشان دهید که با فرض رتبه $(A) = m$، یک جواب بهینه برای مساله (P) به‌طور یگانه یک جواب بهینه برای دوگان (P) را به‌دست می‌دهد.

ت) فرض کنید رتبه $(A) \neq m$. با فرض وجود جواب بهینه برای مساله (P)، نشان دهید که تعداد جوابهای بهینه برای دوگان مساله (P) نامتناهی است.

۵ـ فرض کنید مساله (P) به‌صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq \circ \end{aligned} \qquad (P)$$

ناتباهیده است. فرض کنید x° یک جواب بهینه برای مساله (P) موجود است. بردار c در مساله (P) را با یک بردار c^* جایگزین کنید و فرض کنید جواب بهینه مساله جدید x^* موجود است.

الف) نشان دهید: $(c^* - c)^T(x^* - x^\circ) \geq \circ$.

ب) فرض کنید x_j در جواب بهینه مساله (P) یک متغیر پایه‌ای است.
فرض کنید $c^* = c + \theta e_j$ که در آن e_j بردار یک (با درایهٔ jام برابر یک و بقیه درایه‌ها برابر صفر) است. نشان دهید که اگر $\theta > \circ$ آنگاه x_j در جواب بهینه مساله جدید نیز یک متغیر پایه‌ای خواهد بود. اگر $\theta < \circ$ آنگاه در خصوص پایه‌ای بودن x_j چه می‌توان گفت؟ استدلال کنید.

پ) اگر c_k را به $c_k + \theta$ تغییر دهیم آنگاه در خصوص تغییرات ممکن در x_j، به‌ازای همه مقادیر j، در جواب بهینه مساله جدید چه می‌توان گفت؟ استدلال کنید.

ت) اگر $c^* = c + \theta e_j$، آنگاه آیا مساله جدید (P) همواره دارای جواب بهینه است؟ آیا مساله جدید می‌تواند ناشدنی یا نامتناهی باشد؟ چرا؟

۶ـ مسالهٔ

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & s.t.\ g_i(x) = a_i^T x - b_i \leq \circ,\ \ i = 1, \ldots, m \end{aligned} \qquad (NLP)$$

را، که در آن f یک تابع محدب دوبار مشتق‌پذیر پیوسته بر روی E^n است، در نظر بگیرید. تعریف کنید:

$$L(x, \lambda) = \lambda_\circ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

بدون در نظر گرفتن هیچ شرایط اضافی برای هر یک از موارد زیر تعیین کنید درست (د) یا نادرست (ن). توجه داشته باشید که برای پاسخ غلط نمره منفی دریافت می‌کنید.

الف) اگر x^* یک مینیمم‌کننده (سراسری) برای NLP باشد، آنگاه یک بردار λ^* وجود دارد به‌طوری که (x^*, λ^*) شرایط کیون‌ـتاکر را صدق می‌دهد.

ب) اگر x^* یک مینیمم‌کننده (سراسری) برای NLP باشد، آنگاه یک بردار λ^* وجود دارد به‌طوری که (x^*, λ^*) شرایط فریتزـجان را صدق می‌دهد.

پ) اگر x^* یک مینیمم‌کننده (سراسری) برای NLP باشد، آنگاه یک بردار $\lambda^* \geq \circ$ وجود دارد به‌طوری که $L(x, \lambda)$ دارای یک نقطه ایستا در (x^*, λ^*) است.

ت) اگر (x^*, λ^*) شرایط کیون‌ـتاکر را صدق دهد، آنگاه x^* یک نقطه مینیمم‌کننده (سراسری) برای NLP است.

ث) اگر (x^*, λ^*) شرایط فریتز-جان را صدق دهد، آنگاه x^* یک نقطه مینیمم‌کننده (سراسری) برای NLP است.

ج) اگر $L(x, \lambda)$ دارای یک نقطه ایستا در (x^*, λ^*)، $\lambda^* \geq 0$ باشد، آنگاه x^* یک نقطه مینیمم‌کننده (سراسری) برای NLP است.

چ) اگر (x^*, λ^*) شرایط کیون-تاکر را صدق دهد، آنگاه شرایط فریتز-جان نیز برای NLP برقرار است.

ح) اگر (x^*, λ^*) شرایط فریتز-جان را با $\lambda_0^* \neq 0$ صدق دهد، آنگاه شرایط کیون-تاکر نیز برای NLP برقرار است و a_iها مستقل خطی هستند.

خ) اگر a_iها مستقل خطی باشند، آنگاه یک (x^*, λ^*) وجود دارد که هر دو شرایط فریتز-جان و کیون-تاکر را صدق می‌دهد.

د) اگر (x^*, λ^*) شرایط فریتز-جان را صدق دهد و a_iها وابسته خطی باشند، آنگاه $\lambda_0^* = 0$.

Optimization

1) Using the duality theory, answer the theorem of the alternatives below. Assume $A \in R^{m\times n}$ is an arbitrary matrix.

Theorem 1:

a) there exists $x \in R^n$ such that $Ax > 0$.

or b) there exists $y \geq 0$ such that $A^T y = 0$ and $\sum_{i=1}^{m} y_i > 0$.

Theorem 2:

a) there exists $z > 0$ such that $A^T z = 0$.

or b) there exists $x \in R^n$ such that $Ax \geq 0$ and $Ax \neq 0$.

2) Consider the linear programming problem (P) as

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax \leq b \end{aligned} \tag{P}$$

where $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $b \geq 0$.

a) Prove: The problem (P) has an optimal solution if and only if there exists $\lambda \in R^m$ such that

$$\begin{aligned} c - A^T\lambda = 0 \\ \lambda \leq 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

b) Let $\bar{x}$ be a feasible point for (P). Assume that $\bar{\lambda}$ satisfies the conditions (*). Give additional necessary and sufficient conditions for $\bar{x}$ to be an optimal point. Prove your claim.

3) Consider problem (P) below:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x^T B x \\ s.t. \quad & Bx = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

where B is a real shkew symmetric matrix ($B = -B^T$). Prove or disprove the following claims.

Claim 1: If (P) is feasible then (P) has an optimal solution.

Claim 2: If B is invertible then (P) has an optimal solution.

Claim 3: The problem (P) can be feasible with arbitrarily small values of of z.

Claim 4: The dual of (P) is always feasible.

4) Consider problem (P) as

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

where A, $m \times n$. Assume rank $(A) = m$. We know that the dual simplex method requires an initial dual feasible simplex tableau. Consider the following procedure:

1) Determine m independent columns of A and let B be composed of those columns.

2) Let $b^* = Bx$, with $x \geq 0$.

3) Solve problem (P) with b replaced by b^*, using the primal simplex method.

4) Replace b^* by b in the final simplex tableau and compute the associated right hand side for the tableau.

a) Explain how it is possible to obtain a dual feasible tableau by use of the above procedure (explain how the steps (1) and (4) are carried out).

b) Is it possible that the above procedure fail? Expalin your answer.

c) Show that with the assumption that rank $(A) = m$, an optimal solution for (P) uniquely determines an optimal solution for the dual of (P).

d) Assume rank $(A) \neq m$. Assuming that (P) has an optimal solution, show that there are an infinite number of optimal solutions for the dual of (P).

5) Assume that the problem (P) having the form

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

in nondegenerate. Assume x^0 is an optimal solution for (P). Replace the vector c with c^* and assume the new optimal solution to be x^*.

a) Show that $(c^* - c)^T(x^* - x^0) \geq 0$.

b) Assume that x_j is a basis variable at the optimal solution for (P). Let $c^* = c + \theta e_j$, where e_j is the j-th unit vector (the j-th component equal to 1 and the remaining ones equal to 0). Show that if $\theta > 0$ then x_j will also remain basic at the optimal solution for the new problem. If $\theta < 0$ then what can be said about x_j being basic or nonbasic? Expalin.

c) If c_k is changed to $c_k + \theta$, then what can be said about the changes to x_j, for all j, at the optimal solution of the new problem? Explain.

d) If $c^* = c + \theta e_j$, then does the new problem (P) have always an optimal solution? Can the new problem be infeasible or infinite?

6) Consider

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.t.\ g_i(x) = a_i^T x - b_i \le 0,\ \ i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{NLP}$$

where the function f is convex and twice continuously differentiable on E^n. Define $L(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

Are the following true or false? (Note: Credit will be deducted for incorrect answers.)

a) If x^* is a (global) minimum to NLP, then there exists a vector λ^* such that (x^*, λ^*) satisfies the Kuhn-Tucker conditions.

b) If x^* is a (global) minimum to NLP, then there exists a vector λ^* such that (x^*, λ^*) satisfies the Fritz-John conditions.

c) If x^* is a (global) minimum to NLP, then there exists a vector $\lambda^* \ge 0$ such that $L(x, \lambda)$ has a stationary point at (x^*, λ^*).

d) If (x^*, λ^*) satisfies the Kuhn-Tucker conditions, then x^* is a (global) minimum to NLP.

e) If (x^*, λ^*) satisfies the Fritz-John conditions, then x^* is a (global) minimum to NLP.

f) If $L(x, \lambda)$ has a stationary point at (x^*, λ^*), $\lambda^* \ge 0$, then x^* is a (global) minimum to NLP.

g) If (x^*, λ^*) satisfies the Kuhn-Tucker conditions, then the Fritz-John conditions will also hold for the NLP.

h) If (x^*, λ^*) satisfies the Fritz-John conditions with $\lambda_0^* \ne 0$, then the Kuhn-Tucker conditions will also hold for the NLP and the a_i are linearly independent.

i) If the a_i are linearly independent, then there exists a (x^*, λ^*) satifying both the Fritz-John and the Kuhn-Tucker conditions.

j) If (x^*, λ^*) satisfies the Fritz-John conditions and the a_i are linearly dependent, then $\lambda_0^* = 0$.