

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۹،۳،۲۷

موضوع امتحان: احتمال و فرآیندهای تصادفی

۱- یک زنجیر مارکف روی اعداد صحیح نامنفی در نظر بگیرید طوری که زنجیر با شروع از وضعیت x با احتمال $0 < p < 1$ به وضعیت $x + 1$ و با احتمال $1 - p$ به وضعیت صفر می‌رود.

الف) نشان دهید این زنجیر ساده نشدنی است؛

ب) $P\{T_0 = n\}$ را برای $n = 1, 2, \dots$ بیابید؛

پ) ثابت کنید این زنجیر بازگشتی است؛

ت) توزیع مانای یکتای زنجیر را بیابید.

۲- یک زنجیر شاخه‌ای در نظر بگیرید که در آن تابع جرم احتمال تعداد افراد خانواده‌ای که هر موجود تولید می‌کند، به صورت $f(x) = p(1-p)^x$ است ($x = 0, 1, 2, \dots$) مشخص کنید تحت چه شرطی روی p نسل این زنجیر منقرض می‌شود و تحت چه شرطی نمی‌شود.

۳- فرض کنید B_t حرکت براونی دوبعدی باشد و فرض کنید $\rho > 0$. اگر

$$D_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \rho\}$$

احتمال $P\{B_t \in D_\rho\}$ را حساب کنید.

۴- فرض کنید $\{B_t\}_{t \geq 0}$ حرکت براونی یک بعدی روی $(0, \infty)$ باشد، نشان دهید برای $c > 0$

$$\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t} \quad t \geq 0$$

نیز حرکت براونی است.

۵- فرض کنید به جعبه‌ای که تعدادی ذره در آن قرار دارد، در زمانهای $n = 1, 2, 3, \dots$ تعداد ξ_n ذره وارد می‌شود و ξ_n ها دارای توزیع پواسن با پارامتر مشترک λ هستند. فرض کنید هر ذره مستقل از تمام ذرات دیگر و مستقل از چگونگی ورود و خروج ذرات به جعبه در زمان $n + 1$ با احتمال $0 < p < 1$ در جعبه می‌ماند و با احتمال $q = 1 - p$ از جعبه خارج می‌شود. فرض کنید X_n ، تعداد ذرات درون جعبه در زمان n باشد. اگر $R(X_n)$ بخشی از ذرات درون جعبه در زمان n باشد که در زمان $n + 1$ هنوز درون جعبه‌اند،

الف) نشان دهید توزیع $R(X_n)$ به شرط X_n دو جمله‌ای با پارامتر p است؛
 ب) $R(X_n)$ دارای توزیع پواسن با پارامتر pt است در صورتی که X_n دارای توزیع پواسن t باشد؛
 پ) اگر X دارای توزیع پواسن با پارامتر t باشد، ثابت کنید X_n دارای توزیع پواسن با پارامتر

$$tp^n + \frac{\lambda}{q}(1 - p^n)$$

است.

۶- گیریم $\{B(t), t \geq 0\}$ یک حرکت برون‌ی استاندارد باشد

الف) گیریم

$$Y_n = \sum_{i=1}^{2^n} |B(i2^{-n}) - W((i-1)2^{-n})|$$

نشان دهید که

$$\sum P\{Y_n < n\} < \infty$$

ب) نشان دهید $B(., w)$ با احتمال یک دارای تغییرات بی‌کران است.

Probability and Stochastic processes

- 1) Consider a Markov chain on the nonnegative integers such that starting from x , the chain goes to state $x + 1$ with probability p , $0 < p < 1$, and goes to state 0 with probability $1 - p$.
 - a) Show that this chain is irreducible,
 - b) Find $P_0\{T_0 = n\}$, for $n \geq 1$,
 - c) Show that the chain is recurrent,
 - d) Find the unique stationary distribution of this chain.

- 2) Consider a branching chain with $f(x) = p(1 - p)^x$, $x \geq 0$, as the probability mass function of the size of the family of each particle. Determine under what conditions on p , the chain become extinct with probability one.

- 3) Let $B_t, t \geq 0$, be the two-dimensional Brownian motion, and for each $\rho > 0$ define

$$D_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \rho\}.$$

Compute $P\{B_t \in D_\rho\}$.

- 4) If $B_t, t \geq 0$, is the real Brownian motion, show that

$$\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t} \quad t \geq 0$$

is a Brownian motion for $c > 0$.

- 5) Suppose that ξ_n particles are added to a box at times $n = 1, 2, \dots$, where $\xi_n, n \geq 1$, are independent and have a Poisson distribution with common parameter λ . Suppose that each particle in the box at time n , independently of all the other particles has probability of remaining in the box at time $n + 1$ and probability $q = 1 - p$ of being removed from the box at time $n + 1$. Let X_n be the number of particles in the box at time n . If $R(X_n)$ denotes the number of particles present at time n that remain in the box at time $n + 1$,

- a) Show that the conditional distribution of $R(X_n)$ with respect to X_n is binomial,
- b) Show that $R(X_n)$ has a Poisson distribution of parameter pt if X_n is Poisson with parameter t ,
- c) If X_0 has Poisson distribution with parameter t , show that X_n is Poisson with parameter

$$tp^n + \frac{\lambda}{q}(1 - p^n)$$

6) Let $\{B(t), t \geq 0\}$ be a Brownian motion

a) Let $Y_n = \sum_{i=1}^{2^n} |B(i2^{-n}) - W((i-1)2^{-n})|$ show that $\sum P\{Y_n < n\} < \infty$.

b) Show that $B(., w)$ is with probability one of unbounded variation.