بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۰/۴/۸

موضوع امتحان: **احتمال و فرآیندهای تصادفی**

۱ـ فرض کنید $\{B^{(\circ)}(t)\quad ;\quad \circ \le t \le 1\}$ یک پل براونی باشد یعنی یک فرآیند گوسی با مسیرهای پیوسته که $B^{(\circ)}(\circ) = B^{(\circ)}(1) = \circ$ و تابع کوواریانس آن به‌صورت

$$Cov(B^{(\circ)}(s),\ B^{(\circ)}(t)) = s(1-t);\quad \circ \le s \le t \le 1$$

است. $B(t)$ را با

$$B(t) := (1+t)B^{(\circ)}\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که B یک حرکت براونی است.

۲ـ فرض کنید $\{N(t)\ ;\ t \ge \circ\}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ، $\lambda > \circ$ و $X_\circ$ از این فرآیند مستقل باشد طوری که

$$P\{X_\circ = 1\} = P\{X_\circ = -1\} = \frac{1}{2}.$$

تعریف کنید $X(t) = X_\circ(-1)^{N(t)}$.

الف) ثابت کنید $\{X(t)\ ;\ t \ge \circ\}$ یک فرآیند مانا است.

ب) میانگین و تابع کوواریانس $X(t)$ را محاسبه کنید.

پ) فرض کنید

$$D(t) = \int_\circ^t X(s)ds.$$

نشان دهید که واریانس $D(t)$ برابر است با $\frac{1}{\lambda}(t - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda t})$.

۳ـ گیریم $\{S_n;\ n \ge \circ\}$ یک زنجیر مارکف با ماتریس گذر زیر باشد

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= \lambda_i, \\ p_{i,i-1} &= \mu_i, \\ p_{i,k} &= \circ; \qquad |i-k| \ne 1, \end{aligned}$$

که در آن $\lambda_i + \mu_i = 1$. این زنجیر را می‌توان مانند یک قدم زدن تصادفی در نظر گرفت که ذره روی اعداد صحیح مثبت یا منفی طوری قرار می‌گیرد که احتمال هر قدم به مکان ذره بستگی دارد. با چه شرطی، یک توزیع مانای π وجود دارد؟

۴ـ فرض کنید X یک زنجیر مارکف روی $\{0, 1, 2, \ldots\}$ باشد که ماتریس گذر آن به این ترتیب تعیین می‌شود: برای $j \geq 0$، $p_{0j} = a_j$، $p_{ii} = r$ و برای $i \geq 1$، $p_{i,i-1} = 1 - r$ می‌باشد. حالتهای زنجیر را دسته‌بندی کرده و میانگین زمان بازگشت آنها را بیابید.

۵ـ شیشه‌ای در ابتدا شامل m قرص بزرگ و n قرص کوچک است. بیماری هر روز یکی از قرصها را به تصادف انتخاب می‌کند. اگر قرص کوچک انتخاب شود، آن قرص را می‌خورد. اگر قرص بزرگ انتخاب شود آنگاه قرص را نصف کرده و نصف آن را خورده و نصف دیگر را به داخل شیشه برمی‌گرداند و به‌عنوان یک قرص کوچک در نظر می‌گیرد. اگر X نشان دهندهٔ تعداد قرصهای کوچک پس از انتخاب آخرین قرص بزرگ باشد که نصف آن به شیشه برگردانده شده است، $E(X)$ را محاسبه کنید.

۶ـ گیریم $\{B(t)\ ;\ t \geq 0\}$ یک حرکت براونی استاندارد باشد. برای $x \in \mathbb{R}$، نخستین زمان عبور $T(x)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$T(x) = \inf\{t :\ B(t) = x\}.$$

الف) فرض کنید $M(t) = \max\{B(s) :\ 0 \leq s \leq t\}$. نشان دهید که $M(t)$ و $|B(t)|$ دارای یک توزیع هستند.

ب) نشان دهید که برای $\omega > 0$، داریم

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} |B(s)| \geq \omega) \leq 2P(|B(t)| \geq \omega) \leq \frac{2t}{\omega^2}.$$

پ) تابع توزیع $T(x)$ را بیابید.

Probability and Stochastic Processes

1) Let $\{B^{(0)}(t) \;\; ; \;\; 0 \le t \le 1\}$ be a Brownian bridge; that is a continuous path Gaussian process with $B^{(0)}(0) = B^{(0)}(1) = 0$ and covariance function

$$Cov(B^{(0)}(s),\ B^{(0)}(t)) = s(1-t); \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

Define $B(t)$ by $B(t) := (1+t)B^{(0)}\left(\frac{t}{1+t}\right)$, and show that B is a Brownian motion.

2) Let $\{N(t)\ ;\ t \ge 0\}$ denote a Poisson process having rate λ, $\lambda > 0$, and let X_0 be independent of this process and be such that $P\{X_0 = 1\} = P\{X_0 = -1\} = \frac{1}{2}$. Define $X(t) = X_0(-1)^{N(t)}$.

a) Prove that $\{X(t)\ ;\ t \ge 0\}$ is a stationary process.

b) Compute the mean and covariance function of $X(t)$.

c) Let

$$D(t) = \int_0^t X(s)ds.$$

Show that the variance of $D(t)$ is given by $\frac{1}{\lambda}(t - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda t})$.

3) Let $\{S_n\ ;\ n \ge 0\}$ be a Markov chain with transition matrix given by

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= \lambda_i, \\ p_{i,i-1} &= \mu_i, \\ p_{i,k} &= 0 \quad \text{if} \quad |i-k| \ne 1, \end{aligned}$$

where $\lambda_i + \mu_i = 1$. This may be regarded as a random walk, taking positive or negative unit steps on the integers, such that the step probability depend on the position of the particle. When does exist a stationary distribution $\boldsymbol{\pi}$?

4) Let X be a Markov chain on $\{0, 1, 2, \dots\}$ with transition matrix given by $p_{0j} = a_j$ for $j \ge 0$, $p_{ii} = r$ and $p_{i,i-1} = 1 - r$ for $i \ge 1$. Classify the states of the chain, and find their mean recurrence times.

5) A container has m big tablets and n small tablets initially. A patient chooses a tablet at random every day. If a small tablet is chosen, he takes it. But if a big one is chosen, then he devides it in halves and takes one half. The other half is returned into the container and is considered as a small tablet. Let X denote the number of small tablets which have been chosen after the last big tablet that has been returned into the container. Find $E(X)$.

6) Let $\{B(t)\ ;\ t \geq 0\}$ be a standard Brownian motion. The first passage time $T(x)$ to the point $x \in \mathbb{R}$ is given by

$$T(x) = \inf\{t : \quad B(t) = x\}.$$

a) Let $M(t) = \max\{B(s) : \quad 0 \leq s \leq t\}$. Show that $M(t)$ has the same distribution as $|B(t)|$.

b) Show that

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} |B(s)| \geq \omega) \leq 2P(|B(t)| \geq \omega) \leq \frac{2t}{\omega^2} \text{ for } \omega > 0.$$

c) Find the distribution function of $T(x)$.