

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۱،۳،۴

موضوع امتحان: احتمال و فرآیندهای تصادفی

۱- (قضیه حد مرکزی)

فرض کنیم X_1 و X_2 و ... دنباله‌های از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. در این صورت توزیع

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

به توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد همگرا است، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

۲- گیریم f یک تابع پیوسته روی $[0, 1]$ باشد، چند جمله‌ای برنشتین را به صورت

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

تعریف می‌کنیم با ارائه یک اثبات براساس نظریه احتمال قضیه تقریب ویراشتراس را ثابت کنید. یعنی ثابت کنید p_n بطور یکنواخت به f روی $[0, 1]$ همگرا است.

۳- فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال پذیر، Y یک متغیر تصادفی کرانه‌دار و \mathcal{G} یک زیر میدان سیگمائی برل باشد، ثابت کنید

$$E[E[X|\mathcal{G}]Y] = E[XE[Y|\mathcal{G}]]$$

۴- اگر $\{X_n\}$ زیرمارتینگل انتگرال پذیر یکنواخت باشد، آنگاه برای هر زمان توقف α داریم

الف) $\{X_{\alpha \wedge n}\}$ یک زیرمارتینگل انتگرال پذیر یکنواخت است

$$\text{ب) } E(X_1) \leq E(X_\alpha) \leq \sup_n E(X_n)$$

۵- اگر X و Y مستقل باشند و یک $p > 0$ چنان وجود داشته باشد که $E\{|X+Y|^p\} < \infty$ آنگاه

$$E\{|X|^p\} < \infty \text{ و } E\{|Y|^p\} < \infty$$

۶- فرض کنید سه عدد از مجموعه اعداد $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب شده‌اند. نشان دهید که احتمال اینکه عدد سوم بین دو عدد اول باشد، به شرط اینکه عدد اول کوچکتر از عدد دوم باشد، برابر $\frac{1}{4}$ است.

راهنمایی:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

Probability and Stochastic Processes

1) (Central Limit Theorem)

Let $X_1, X_2, X_3 \dots$ be a sequence of independent and identically distributed random variables, each with expectation μ and variance σ^2 . Then the distribution of

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Converges to the distribution of a standard normal random variable. That is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

2) Let f be a continuous function on $[0, 1]$, and define the Bernstein polynomials $\{p_n\}$ as follows:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

by a probability proof show that p_n converges uniformly to f in $[0, 1]$.

3) If X is an integrable r.v., Y a bounded r.v, and \mathcal{G} a Borel subfield, then we have

$$E[E[X|\mathcal{G}]Y] = E[XE[Y|\mathcal{G}]]$$

4) If $\{X_n\}$ is a uniformly integrable submartingale, then for any optional r.v. α

a) $\{X_{\alpha \wedge n}\}$ is uniformly integrable submartingale;

b) $E(X_1) \leq E(X_\alpha) \leq \sup_n E(X_n)$.

5) If X and Y are independent and for some $p > 0$: $E(|X + Y|^p) < \infty$, then $E(|X|^p) < \infty$ and $E(|Y|^p) < \infty$.

6) Suppose that three numbers are selected one by one, at random, and without replacement from the set of numbers $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Show that the probability that the third number falls between the first two if the first number is smaller than the second is, $1/2$.

Hint:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$