بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۷۹,۳,۲۶**

موضوع امتحان: **توپولوژی**

۱ـ $f : \mathbb{D}^n \to S^{n-1}$ را یک نگاشت پیوسته می‌گیریم. نشان دهید $\epsilon > 0$ وجود دارد طوری‌که هر نگاشت پیوسته $g : \partial\mathbb{D}^n \to S^{n-1}$ که $\|g(x) - f(x)\| < \epsilon$ برای هر $x \epsilon \partial\mathbb{D}^n$، گسترشی پیوسته به روی $\mathbb{D}^n$ دارد که در آن

$$\mathbb{D}^n = \{x \epsilon \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \quad , \quad S^{n-1} = \{x \epsilon \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

۲ـ $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ را یک نگاشت C^1 روی زیرمجموعه باز U می‌گیریم که روی زیر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset U$ یک‌به‌یک است و $df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نیز برای هر $x \in K$ یک‌به‌یک است. نشان دهید f در یک همسایگی K یک‌به‌یک است.

۳ـ برای فضای $S^1 \vee S^1$ تمام فضاهای پوششی ۲ـلایه‌ای همبند را شناسایی کنید.

۴ـ گروه بنیادی فضای $S^2 \cup L_1 \cup L_2$ را محاسبه کنید که در آن L_2, L_1 دو قطر متمایز از S^2 هستند.

۵ـ گروههای همولوژی فضای زیر را محاسبه کنید:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

۶ـ نشان دهید نمی‌توان روی S^{2n} یک ضرب تعریف کرد که S^{2n} تبدیل به یک گروه توپولوژیک شود.

Topology

1) Let $f : \mathbb{D}^n \to S^{n-1}$ be a continuous map. Show that there exists an $\epsilon > 0$, such that every continuous map $g : \partial\mathbb{D}^n \to S^{n-1}$, $\|g(x) - f(x)\| < \epsilon$ for all $x \epsilon \partial\mathbb{D}^n$, has a continuous extension on $\mathbb{D}^n$. Here

$$\mathbb{D}^n = \{x \epsilon \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \quad , \quad S^{n-1} = \{x \epsilon \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

2) Let $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ be a C^1 map which is one to one on a compact subset $K \subset U$. Show that if $df(x)$ is one to one for all $x \epsilon K$, then f is a one to one map in a neighborhood of K.

3) Find all connected 2-sheeted covering spaces of $S^1 \vee S^1$.

4) Let L_1, L_2 be two distinict diameters of S^2. Compute the fundemental group of the space $S^2 \cup L_1 \cup L_2$.

5) Compute the homology groups of the space

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

6) Show that S^{2n} is not the underlying space of a topological group.