

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۰/۴/۷

موضوع امتحان: توپولوژی

۱-  $(\mathbb{C}P^1)$ ، فضای افکنشی مختلط یک بعدی را به طور دقیق تعریف کنید و نشان دهید با کره دو بعدی واحد در  $\mathbb{R}^3$  همسانریخت است. اگر  $a, b, c, d$  اعداد مختلط باشند و  $ad - bc \neq 0$ ، توضیح دهید به چه مفهومی  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  یک همسانریختی از کره دو بعدی به خود آن ایجاد می‌کند.

۲- دایره به مرکز  $(a, 0)$  و شعاع  $b$ ،  $b < a$ ، در صفحه  $xy$  را در فضا حول محور  $y$  دوران می‌دهیم تا یک چنبره  $T$  پدید آید. خطوط انحنای این چنبره را مشخص کنید. نشان دهید  $T$  فاقد نقطه نافی است.

۳- فرض کنید  $l_1, \dots, l_k$  خطوط راست متمایز باشند که از مبدا مختصات در  $\mathbb{R}^3$  می‌گذرند و  $\Delta = \bigcup_{i=1}^k l_i$ . گروه بنیادی  $\mathbb{R}^3 \setminus \Delta$  را محاسبه کنید.

۴- فرض کنید  $M_g$  رویه استاندارد فشرده جهت‌پذیر گونه  $g$  باشد. اگر تابع پیوسته‌ای  $M_6 \rightarrow M_g$  یک فضای پوششی تعریف کند نشان دهید  $g = 2$  یا  $6$ . برای کدام  $h$  می‌توان یک فضای پوششی  $M_h \rightarrow M_2$  تعریف کرد؟

۵- برای افکنش خارج قسمت متعارفی  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ ، تصویر زیرمجموعه  $X$  از  $S^2$  را در  $\mathbb{R}P^2$  به  $\bar{X}$  نمایش می‌دهیم. گروه‌های همولوژی  $\bar{X}$  و  $\mathbb{R}P^2 - \bar{X}$  را در دو مورد زیر محاسبه کنید.

$$X = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\} \quad \text{(الف)}$$

$$X = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0\} \quad \text{(ب)}$$

۶- فرض کنید  $X$  یک مجتمع سادگی باشد و  $X_m$ ،  $m$ -اسکلت آن. نشان دهید نگاشت همریختی  $H_j(X_m) \rightarrow H_j(X)$  که از نگاشت جزئیت  $X \hookrightarrow X_m$  القا می‌شود به ازای  $j < m$  یکرخیختی است. اگر  $X$   $n$ -ساده استاندارد باشد و  $m < n$ ، شاخص اوپلر  $X_m$  را محاسبه کنید.

# Topology

- 1) Precisely define  $\mathbb{C}P^1$ , the one-dimensional complex projective space, and show that it is homeomorphic to the unit 2-dimensional sphere in  $\mathbb{R}^3$ . If  $a, b, c, d$  are complex numbers and  $ad - bc \neq 0$ , explain that in what sense, the map  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  induces a self-homeomorphism of the 2-sphere.
- 2) Consider the circle of radius  $b$  in the  $xy$ -plane centered at  $(a, 0)$ ,  $b < a$ , and rotate it in the space around the  $y$ -axis to develop a torus  $\mathbb{T}$ . Determine the lines of curvature of this torus. Show that  $\mathbb{T}$  lacks umbilical points.
- 3) Let  $l_1, \dots, l_k$  be distinct lines in  $\mathbb{R}^3$  passing through the origin and  $\Delta = \bigcup_{i=1}^k l_i$ . Compute the fundamental group of  $\mathbb{R}^3 \setminus \Delta$ .
- 4) Denote by  $M_g$  the standard compact orientable surface of genus  $g$ . If a continuous map  $M_6 \rightarrow M_g$  defines a covering space, show that either  $g = 2$  or  $g = 6$ . For what values of  $h$  can one define a covering space  $M_h \rightarrow M_2$ ?
- 5) For the canonical quotient projection  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ , denote the image in  $\mathbb{R}P^2$  of the subset  $X$  of  $S^2$  by  $\overline{X}$ . Compute the homology groups of  $\overline{X}$  and  $\mathbb{R}P^2 \setminus \overline{X}$  in the following two cases.
  - (i)  $X = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\}$
  - (ii)  $X = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0\}$
- 6) Suppose  $X$  is a simplicial complex and  $X_m$  its  $m$ -skeleton. Show that the homomorphism  $H_j(X_m) \rightarrow H_j(X)$  induced from the inclusion map  $X_m \hookrightarrow X$  is an isomorphism for  $j < m$ . If  $X$  is the standard  $n$ -simplex and  $m < n$ , compute the Euler characteristic of  $X_m$ .