

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۵/۲/۹

موضوع امتحان: توپولوژی

۱- خم $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

که در اینجا $a \neq 0$ و b اعداد حقیقی داده شده‌اند. انحنا و تاب این خم را محاسبه کنید. کلیه خمهای هموار $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ را توصیف کنید که انحنا و تاب آنها ثابت است.

۲- نگاشت خطی وارونپذیری $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مفروض است. مقصود از f^n ترکیب $f \circ \dots \circ f$ n بار، است (برای $n = 0$ ، همانی $f^0 = \text{id}$ ، و برای n منفی، به جای f ، وارون f را با خود ترکیب می‌کنیم). روی مجموعه $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ، رابطه هم‌ارزی \sim را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \text{ اگر و تنها اگر عدد صحیح } n \text{ وجود داشته باشد که } f^n(x) = y$$

مجموعه رده‌های هم‌ارزی را به X نمایش می‌دهیم و روی آن توپولوژی خارج قسمت را منظور می‌کنیم.

الف) آیا نگاشت خارج قسمت $q : U \rightarrow X$ ، به هر عضو U ، رده هم‌ارزی آن را نسبت می‌دهد؟ باز است؟

ب) شرایطی معقول روی f منظور کنید که X هاوسدرف شود.

ج) شرایطی معقول روی f منظور کنید که X فشرده شود.

۳- گروه بنیادی زیرفضای X از \mathbb{R}^3 را به دست آورید که از حذف کردن نیمه‌های اکیداً مثبت سه محور مختصات به دست می‌آید.

۴- حکم جبری زیر را به کمک توپولوژی جبری ثابت کنید: اگر گروه آزاد با k مولد باشد، آنگاه به ازای هر $k \geq 2$ ، دارای زیرگروهی با شاخص متناهی و یکرخت با F_k است.

۵- S^n ، $n \geq 2$ ، کره واحد n -بعدی است، و X فضای خارج قسمت به دست آمده از S^n با یکی گرفتن قطب شمال و قطب جنوب است. گروههای همولوژی X را محاسبه کنید.

۶- فرض کنید K زیرمجموعه‌ای از S^n ، $n \geq 1$ ، همسانریخت با S^{n-1} باشد. به کمک همولوژی (یا کوه‌همولوژی) نشان دهید $S^n - K$ از دو مؤلفه همبندی تشکیل شده است.

Topology

- 1) Define the curve $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ by:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

where $a \neq 0$ and b are given real numbers. Compute the curvature and torsion of this curve. Describe **all** smooth curves $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ with constant curvature and torsion.

- 2) An invertible linear map $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is given. By f^n we denote the n -fold composition $f \circ \cdots \circ f$ (for $n = 0$, $f^0 = \text{identity}$, and for negative n , we use f^{-1} instead of f). We define an equivalence relation \sim on $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ by:

$$x \sim y \text{ if and only if } \exists \text{ integer } n \text{ with } f^n(x) = y.$$

We denote the set of equivalence classes by X and endow X with the quotient topology.

- a) Is the quotient map $q : U \rightarrow X$ open? (q assigns to each element of U , its equivalence class.)
 - b) Give reasonable condition(-s) on f to make X Hausdorff.
 - c) Give reasonable condition(-s) on f to make X compact.
- 3) Compute the fundamental group of X where X is obtained from \mathbb{R}^3 by deleting the positive halves of the three axes.
- 4) Prove the following algebraic proposition using algebraic topology: If F_k is the free group on k generators, then for every $k \geq 2$, F_2 contains a subgroup of finite index isomorphic to F_k .
- 5) Let S^n be the unit n -sphere, $n \geq 2$, and X the quotient space obtained from S^n by identifying the north- and south poles. Compute the homology groups of X .
- 6) Let X be a subset of S^n , $n \geq 1$, homeomorphic to S^{n-1} . Using homology (or cohomology), show that $S^n - X$ consists of two connected components.