بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۶/۲/۱۷

موضوع امتحان: **توپولوژی**

۱) ثابت کنید تصویر یک فضای توپولوژیک فشردهٔ موضعاً همبند تحت نگاشت پیوسته، موضعاً همبند است.
یادآوری: فضای X را **موضعاً همبند** می‌نامیم در صورتی که برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U از x، همسایگی همبند (نه لزوماً باز) V از x وجود داشته باشد که $V \subset U$.

۲) کلیهٔ ژئودزیکهای روی سطح یک کره دو بُعدی در $\mathbb{R}^۳$ (با متریک القایی از $\mathbb{R}^۳$) را مشخص کنید.

۳) فرض کنید S یک رویهٔ فشرده جهتپذیر از گونهٔ g باشد و S' با حذف کردن k نقطه از S به‌دست آید. بُعد گروههای همولوژی $H_i(S', \mathbb{R})$ را برحسب g و k به‌دست آورید.

۴) S^k و S^n را به‌ترتیب کره‌های واحد kـبُعدی و nـبُعدی بگیرید و $۰ < k < n$. نشان دهید هر نگاشت پیوسته $S^k \to S^n$ با نگاشت ثابت هموتوپ است.

۵) فرض کنید B گوی بستهٔ nـبُعدی است، ∂B مرز آن (کرهٔ $(n-۱)$ـبُعدی) و $f : B \to \partial B$ یک نگاشت پیوسته است. نشان دهید تحدید f به ∂B نمی‌تواند یک همسانریختی باشد.

۶) $S^۳$ کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^۴$ است و $S^۱$ دایره واحد:

$$S^۱ = \{(x_۱, x_۲, ۰, ۰,) \mid x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\} \subset S^۳$$

فرض کنید D یک دیسک بستهٔ دوبُعدی متقاطع نسبت به $S^۱$ در $S^۳$ باشد که $S^۱ \cap int\,(D)$ از یک نقطه تشکیل شده باشد. نشان دهید $[\partial D]$ (ردهٔ همولوژی تعریف شده توسط مرز D) یک مولد برای $H_۱(S^۳ - S^۱)$ است.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Topology

1) Show that the continuous image of a compact locally connected topological space is locally-connected. Recall: A space X is **locally-connected** if for every $x \in X$ and any neighborhood U of x, there exists a (not necessarily open) neighborhood V of x, $V \subset U$, which is connected.

2) Determine all the geodesics on the surface of a sphere in $\mathbb{R}^3$ (with the induced metric from $\mathbb{R}^3$).

3) Let S be a compact oriented surface of genus g. We obtain S' from S by deleting k points. Determine the dimension of homology groups $H_i(S', \mathbb{R})$ in term of g and k.

4) Let S^k and S^n be unit spheres of dimension k and n respectively, $0 < k < n$. Show that any continuous map $S^k \to S^n$ is homotopic to a constant map.

5) Let B be the closed unit ball in $\mathbb{R}^n$, ∂B its boundary (unit $(n-1)$-sphere), and $f : B \to \partial B$ continuous. Show that the restriction of f to ∂B cannot be a homeormorphism.

6) S^3 is the unit 3-sphere in $\mathbb{R}^4$ and S^1 be unit circle:

$$S^1 = \{(x_1, x_2, 0, 0,) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset S^3$$

   Suppose that D is a closed disk in S^3 transverse to S^1 so that $S^1 \cap int\,(D)$ consists of one point. Show that $[\partial D]$ (be homology class defined by ∂D) is a generator for $H_1(S^3 - S^1)$.