بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۷,۳,۱

موضوع امتحان: **توپولوژی جبری**

۱ـ فرض کنید $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته بین فضاهای متریک و $q \in Y$ نقطه‌ای که $\varphi^{-1}(q) \subset X$ فشرده باشد. در این صورت همسایگی‌های U حول $\varphi^{-1}(q)$ در X و V حول q در Y وجود دارد طوری‌که $\varphi_{|_U} : U \longrightarrow V$ یک نگاشت سره است.
(نگاشت f را سره گویند اگر تصویر معکوس هر زیرمجموعه فشرده تحت f، فشرده باشد).

۲ـ خم هموار $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را با شرایط زیر پیدا کنید.
$\kappa(t) \equiv 1, \tau(t) \equiv 1$ و $\gamma(0) = \vec{T}(0) = e_1$، $\vec{N}(0) = e_2, \vec{B}(0) = e_3$.
که در آن، κ و τ به‌ترتیب انحناء و تاب و $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ کنج فرنه می‌باشد.

۳ـ نقاط x_0 و x_1 را روی فضای همبند کمانی X در نظر بگیرید. رابطهٔ بین گروههای $\pi_1(X, x_0)$ و $\pi_1(X, x_1)$ چیست؟ در حالتی که $\pi_1(X, x_0)$ آبلی باشد چه می‌توان گفت؟

۴ـ عدد اویلر فضای $\underbrace{S^n \vee \ldots \vee S^n}_{k}$ را محاسبه نمائید (اجتماع k کرهٔ n بُعدی که در یک نقطه مشترک هستند).

۵ـ گروههای همولوژی $\mathbb{C}^2$ـ{محورها} را محاسبه کنید.

۶ـ نگاشت $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $(z_1, z_2, w) \longrightarrow w^2 - z_1 \cdot z_2$ را در نظر بگیرید. اگر S مجموعه صفرهای آن باشد نشان دهید $S \backslash \{0\}$ همبند ساده نیست.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination

Topology

1. Let $\varphi : X \longrightarrow Y$ be a continuous map of metric spaces and assume that there is a point $q \in Y$ such that $\varphi^{-1}(q) \subset X$ is compact. Show that there exist open neighborhoods U of $\varphi^{-1}(q)$ in X and V of q in Y such that $\varphi_{|_U} : U \longrightarrow V$ is proper. (A map f is proper if the inverse image of every compact set under f is compact).

2. Find a smooth curve $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ for which $\kappa(t) \equiv 1$ and $\tau(t) \equiv 1$ and $\gamma(0) = \vec{T}(0) = e_1$, $\vec{N}(0) = e_2$ and $\vec{B}(0) = e_3$. Here κ and τ are, respectively, curvature and torsion, and $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ is the Frenet frame.

3. Let X be a path-connected space and x_0, x_1 two distinct points in X. What is the relation between $\pi_1(X, x_0)$ and $\pi_1(X, x_1)$? What if $\pi_1(X, x_0)$ is abelian?

4. Compute the Euler number of $\underbrace{S^n \vee \ldots \vee S^n}_{k}$ (Join of k n-spheres at one point).

5. Compute the homology groups of $\mathbb{C}^2 - \{axes\}$.

6. We consider the map $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2, w) \longrightarrow w^2 - z_1 \cdot z_2$. If S is the zero set of this map, show that $S \backslash \{0\}$ is not simply connected.