

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۷۸/۲/۹

موضوع امتحان: توپولوژی

۱- مثالهایی بزنید که

(i) فضا هاوسدورف ولی فضای خارج قسمتی هاوسدورف نباشد.

(ii) نگاشت خارج قسمتی باز نباشد.

(iii) فضا FC ولی فضای خارج قسمتی FC نباشد.(فضای توپولوژیکی را FC گویند هرگاه که در هر نقطه دارای پایه شمارا از بازها باشد.)۲- برای چنبره $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u) \quad (0 < b < a)$$

انحنای گائوسی و خطوط انحناء را به دست آورید. همچنین نقاطی را که دارای 0 ، 1 و 2 امتداد مجانبی هستند مشخص نمایید.

۳- نشان دهید هر نگاشت پیوسته $f: S^n \rightarrow S^1$ برای $n \geq 2$ با یک نگاشت ثابت هموتوپ است.

۴- چنبره $T = S^1 \times S^1$ را در نظر بگیرید. دایره $\{y=0\} \times S^1$ در آن را به یک نقطه جمع کنید. گروه بنیادی فضای به دست آمده را محاسبه کنید.

۵- σ را یک ۳-سادک و σ^i را n -اسکلت آن بگیرید. گروههای همولوژی σ^i برای $0 \leq i \leq 3$ را توصیف کنید.

۶- گروههای همولوژی فضای $S^1 - \mathbb{R}^4$ را محاسبه کنید که در آن

$$S^1 = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Topology

1) Give examples of:

- i) A Hausdorff space with non-Hausdorff quotient space.
- ii) A non-open quotient map.
- iii) A first countable space with non-first-countable quotient space.

2) For the torus: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u) \quad (0 < b < a)$$

compute the Gaussian curvature and the lines of curvature. Describe the points with 0, 1, and 2 asymptotic directions.

- 3) Show that every continuous map $f : S^n \longrightarrow S^1$, $n \geq 2$, is homotopic to a constant map.
- 4) Consider the torus $T = S^1 \times S^1$. Collapse a circle $S^1 \times \{y_0\}$ to a point. Compute the fundamental group of the space thus obtained.
- 5) Let σ be a 3-simplex and σ^i its i -skeleton. Compute the homology groups of σ^i for $0 \leq i \leq 3$.
- 6) Compute the homology groups of $\mathbb{R}^4 - S^1$ where:

$$S^1 = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1\}$$