بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۲/۲/۲۵
موضوع امتحان: جبر

در تمامی مسائل زیرحلقه‌ها یکدار بوده و مدولها یکانی می‌باشند.

۱− فرض کنید G گروهی متناهی و از مرتبهٔ n بوده و H زیرگروه نرمالی از G باشد که مرتبهٔ آن عدد اول p است. فرض کنید n و $p-1$ نسبت به هم اولند. ثابت کنید $H \subseteq Z(G)$ که در آن $Z(G)$ مرکز گروه G است.

۲− فرض کنید f یک چندجمله‌ای تحویل ناپذیر از درجهٔ d روی میدان متناهی از مرتبهٔ اول p باشد. همچنین فرض کنید F یک میدان p^n عضوی باشد. ثابت کنید f در F دارای ریشه است اگر و تنها اگر $d|n$.

۳− فرض کنید F یک میدان بوده و $A, B \in M_n(F)$. ثابت کنید:

i) $\det(A \otimes B) = (\det A \det B)^n$.

ii) $rank\ (A \otimes B) = (rank\ A)(rank\ B)$.

(اگر $A = [a_{ij}]$ منظور از $A \otimes B$ ماتریسی $n^2 \times n^2$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود،
$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}.)$$

۴− فرض کنید R یک حلقه بوده و $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقهٔ R باشد. اگر $I(R)$ اشتراک تمام ایده‌آلهای ماکسیمال دوطرفه R باشد ثابت کنید $J(R) \subseteq I(R)$. همچنین ثابت کنید اگر R یک حلقهٔ آرتینی چپ باشد آنگاه $J(R) = I(R)$.

۵− فرض کنید M و N دو Rـ مدول راست بوده و L یک Rـ مدول چپ باشد.
آیا نگاشت طبیعی

$$(M \times N) \otimes_R L \to (M \otimes_R L) \times (N \otimes_R L)$$

پوشا است؟ در حالتی که L با تولید متناهی باشد چطور؟

٦− الف) فرض کنید $0 \neq e \neq 1$ عنصری خودتوان ($e^2 = e$) باشد که در مرکز حلقهٔ R قرار دارد. نشان دهید Re یک Rـمدول چپ تصویری است ولی Rـمدول چپ آزاد نمی‌باشد.

ب) اگر D یک حلقه بوده به‌طوریکه هر Dـمدول چپ ساده آزاد باشد ثابت کنید D یک حلقهٔ تقسیم است.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Algebra

Throughout all rings have an identity and modules are unitary.

1) Let G be a finite group of order n, and let H be a normal subgorup of G of prime order p. Suppose that n is relatively prime to $p-1$. Prove $H \subseteq Z(G)$, where $Z(G)$ is the center of G.

2) Let f be an irreducible polynomial of degree d over the finite field of order prime p. Let F be a field with p^n elements. Prove that f has a root in F if and only if d divides n.

3) Let F be a field and $A, B \in M_n(F)$. Show that

i) $\det(A \otimes B) = (\det A \det B)^n$.

ii) $rank\ (A \otimes B) = (rank\ A)(rank\ B)$

(If $A = [a_{ij}]$, then $A \otimes B$ is defined as the matrix $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1\text{n}}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}$.)

4) Let R be a ring and $J(R)$ be the Jacobson radical of R. If $I(R)$ is the intersection of all maximal two sided ideals of R show that $J(R) \subseteq I(R)$. Also prove that if R is a left Artinian ring, then $J(R) = I(R)$.

5) Let M, N be two right R-modules, and L a left R-module.

Is the natural mapping,

$$(M \times N) \otimes_R L \to (M \otimes_R L) \times (N \otimes_R L)$$

surjective? What if L is finitely generated?

6) a) Let $\circ \neq e \neq 1$ be a central idempotent ($e = e^2$) of R. Show that Re is a projective left R-module but not free.

b) If D is a ring such that every simple left D-module is free, prove that D is a division ring.