بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۲/۲/۲۵**
موضوع امتحان: آنالیز

۱− فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ روی فاصله $[0,1]$ دارای دوبار مشتق پیوسته باشد و به‌علاوه برای هر $x\in]0,1[$ داریم: $f''(x)>0$. فرض کنید $f(0)=0$ و عدد $a\in]0,1[$ چنان موجود است که $f'(a)<f(1)$. ثابت کنید

$$\exists\ b\in]a,1[:\qquad f'(a)=\frac{f(b)}{b}$$

۲− فرض کنید (X,μ) یک فضای اندازه و μ یک اندازه (مثبت) و σـمتناهی (σ-finite) باشد. فرض کنید g,f دو تابع اندازه‌پذیر و نامنفی روی X باشند، به قسمی که برای هر $\lambda>0$ داریم:

$$\mu(\{x\in X: f(x)>\lambda\})\leq\frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in X:f(x)>\lambda\}} g\,d\mu$$

فرض کنید $f\in L^2(X)$. ثابت کنید

$$\|f\|_{L^2}\leq 2\|g\|_{L^2}$$

۳− فرض کنید μ و v دو اندازه (مثبت) و متناهی روی فضای اندازه $(X,\mathcal{B})$ باشند. ثابت کنید احکام زیر هم‌ارزند.

الف) $\forall E\in\mathcal{B}:\mu(E)=0\Rightarrow v(E)=0$

ب) برای هر $\epsilon > ۰$ لااقل $\delta > ۰$ هست به قسمی که:

$$\forall E \in \mathcal{B} : \mu(E) < \delta \Rightarrow v(E) < \epsilon$$

۴− فرض کنید H یک فضای هیلبرت (حقیقی) و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعضای H باشند که به‌طور ضعیف (weakly) به عنصر $a \in H$ همگراست. ثابت کنید برای هر $b \in H$، $a \neq b$ داریم:

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - b\| > \liminf_{n\to\infty} \|x_n - a\|$$

۵− فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار و اندازه‌پذیر (نسبت به اندازه لبگ) باشد. تعریف می‌کنیم:

$$u : \mathbb{R}\times]۰, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^۲}{۲t}} f(y)dy$$

به‌طور دقیق (با جزئیات تمام) ثابت کنید u بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر است و به علاوه داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{۱}{۲} \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Analysis

1) Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a 2-times countinuously differentiable function on $[0,1]$ and $\forall x \in]0,1[, f''(x) > \circ$. Let $f(\circ) = \circ$ and there exists $a \in]0,1[$ such that $f'(a) < f(1)$. Prove

$$\exists\, b \in]a,1[: \quad f'(a) = \frac{f(b)}{b}$$

2) Let (X,μ) be a measure space and let μ is a (positive) σ-finite measure on X. Let f and g be two measureable and non-negative function on X such that for any $\lambda > \circ$, we have

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{x \in X : f(x) > \lambda\}} g d\mu$$

Let $f \in L^2(X)$. Prove

$$\|f\|_{L^2} \leq 2\|g\|_{L^2}$$

3) Let μ and v be two (positive) finite measures on measure space $(X,\mathcal{B})$. Prove that the following statements are equivalent:

a) $\forall E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \circ \Rightarrow v(E) = \circ$

b) For any $\epsilon > \circ$, there exists $\delta > \circ$ such that

$$\forall E \in \mathcal{B} : \mu(E) < \delta \Rightarrow v(E) < \epsilon$$

4) Let H be a (real) Hilbert space and let $\{x_n\}$ be a sequence in H which converses weakly to $a \in H$. Prove that for any $b \in H$, $a \neq b$, we have

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - b\| > \liminf_{n\to\infty} \|x_n - a\|$$

5) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a bounded and measureable (relative to Lebesgue measure) function on $\mathbb{R}$. Define

$$u : \mathbb{R} \times]\circ, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy$$

Show (in full details) that u is infinitely many times differentiable and also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$